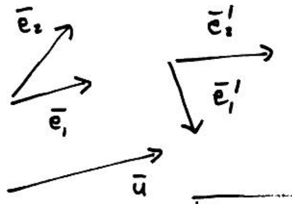
Föreläsning 9

2.5 Basbyte

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ bas för planet. Inför ny bas $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$:



$$\begin{cases} \bar{e}_1' = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \end{cases} \quad 1)$$

$$\boxed{\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2'}$$

$$\bar{u} = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' = x_1'(2\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + x_2'(-\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2) =$$
$$= (2x_1' - x_2')\bar{e}_1 + (x_1' + 3x_2')\bar{e}_2$$

Detta ger

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' - x_2' \\ x_2 = x_1' + 3x_2' \end{cases} \quad 2) \quad \text{Koordinatsamband 1}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' - x_2' \\ x_2 = x_1' + 3x_2' \end{cases} (-2) \iff \begin{cases} x_1 = 2x_1' - x_2' \\ x_1 - 2x_2 = -7x_2' \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1' = \frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 \end{cases} \quad \text{Koordinatsamband 2}$$

OBS! rader i 1) = kolonner i 2)

Ex: En vektor $\bar{u}$ har koordinaterna $(x_1, x_2) = (4, 1)$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ ovan. Bestäm $\bar{u}$:s koordinater i basen $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$!

Lösning: Koordinatsamband 2 ger

$$\begin{cases} x_1' = \frac{3}{7}\cdot 4 + \frac{1}{7}\cdot 1 = \frac{13}{7} \\ x_2' = -\frac{1}{7}\cdot 4 + \frac{2}{7}\cdot 1 = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Svar: $\bar{u} = (13/7, -2/7)$ i basen $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$

7.6. Basbyte i "matrisspråk"

$$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}, \quad E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \bar{e}_2' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \text{ ger}$$

$$E' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} E \quad \text{och} \quad X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X'$$

transponerade

Sats: Om X koord. i basen E och X' koord. i basen E', så gäller

$$E' = S^T E \Rightarrow X = SX' \quad (\text{Koord.samband 1})$$

Matrisen S kallas basbytesmatris

OBS! $X = SX' \iff X' = S^{-1}X$ (Koord.samband 2)

Anm: Kolonnerna i S är koord. för nya basen $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$.

Ortonormerat basbyte:

Om den nya basen är en ON-bas blir därför S en matris av följande typ:

Def: En matris kallas ortogonal om kolonnvektorerna bildar en ON-bas. (Borde kallas ortonormerad matris)

Ex: Är $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ortogonal?

Lösning: Kolonnvekt. $\bar{A}_1 = \frac{1}{3}(1,-2,-2)$, $\bar{A}_2 = \frac{1}{3}(2,2,1)$ och $\bar{A}_3 = \frac{1}{3}(2,-1,2)$. Koll:

$$\begin{cases} \bar{A}_1\cdot\bar{A}_2 = \bar{A}_1\cdot\bar{A}_3 = \bar{A}_2\cdot\bar{A}_3 = 0 \\ |\bar{A}_1| = |\bar{A}_2| = |\bar{A}_3| = 1 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

$\Rightarrow A$ ortogonal.

Sats: Följande villkor är ekvivalenta

(i) A ortogonal

(ii) $A^TA = I$

(iii) $AA^T = I$

(iv) $A^{-1} = A^T$

Bevis: (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) klart! (med lite eftertanke)

(i) $\iff$ (ii): Vi kollar i fallet 3x3-matris:

A_1, A_2, A_3 kolonner i A (= rader i A^T)

$$A^TA = \begin{pmatrix} - A_1 - \\ - A_2 - \\ - A_3 - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\cdot A_1 & A_1\cdot A_2 & A_1\cdot A_3 \\ A_2\cdot A_1 & A_2\cdot A_2 & A_2\cdot A_3 \\ A_3\cdot A_1 & A_3\cdot A_2 & A_3\cdot A_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \leftarrow$$ precis då A_1, A_2, A_3 är en ON-bas, dvs. då A är ortogonal.

Anm: Då $A^TA = I \iff A^T$ ortogonal, måste även raderna i en ortogonal matris vara en ON-bas:

Kolonnerna ON-bas $\iff$ raderna ON-bas

Ex: Bestäm inversen till $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$!

A ortogonal $\Rightarrow A^{-1} = A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Basbyte (igen): Tidigare hade vi

$$E' = S^TE \Rightarrow X = SX' \iff \boxed{X' = S^{-1}X}$$

(Allmänt basbyte)

(5)

Vid ortonormerat basbyte är S en ortogonal matris, dvs. $S^{-1} = S^T$:

$$E' = S^T E \implies X = S X' \iff \boxed{X' = S^T X}$$

(ortonormerat basbyte)

Mer om lösningar till linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad + 3x_5 = -3 \end{cases} \iff AX = Y$$

G.e

$$\iff \begin{cases} x_1 = -3 - 2s + t \\ x_2 = 4 + 3s - 8t \\ x_3 = 4 + 2s - 6t \\ x_4 = \quad s \\ x_5 = \qquad t \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_p} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_{h_1}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{h_2}}$$

dvs. $X = X_p + s X_{h_1} + t X_{h_2}$

- X_p är lösning till ursprungssystemet (partikulärlösning)
- X_{h_1}, X_{h_2} lösningar till den homogena ekvationen $AX = 0$.

Sats: (alla lösn. till $AX=Y$) = (en lösn. till $AX=Y$) + (alla lsg. till $AX=0$)

Rang och nolldimension:

Om vi startar med ett system $AX=0$ och Gausseliminerar får vi till slut ett trappformat system, t.ex.

(6)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = 0 \\ \qquad 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ \qquad\qquad 2x_4 + x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{G} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

- Inringade koefficienter (skilda från noll) kallas pivotelement.
- Lösningar till $GX=0$ kräver 2 st parametrar.

$$\boxed{(\text{antal pivotelement}) + (\text{antal parametrar}) = (\text{antal kolonner})}$$

Def: För en matris $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ definierar vi

rangen = max antal linjärt oberoende bland $A_1, A_2, \ldots, A_n$

nolldimensionen = max antal linj. oberoende lösn. till $AX=0$.

Anm 1: Alla linjärkombinationer av $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

kallas kolonnrummet för A.

$\implies$ rang A = dimensionen av kolonnrummet för A

Anm 2: Alla lösningar till $AX=0$ kallas nollrummet för A

$\implies$ nolldim A = dimensionen av nollrummet för A

(7)

- Låt $AX=0$ vara ett ekv.system och $GX=0$ motsv. trappformade system efter Gausselimination. Då gäller

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{rang } A = \text{antal pivotelement i } G \\ &\text{nolldim } A = \text{antal parametrar i lösn. till } GX=0 \end{aligned}}$$

Detta ger

Sats (Dimensionssatsen):

$$\boxed{\text{rang } A + \text{nolldim } A = \text{antal kolonner i } A}$$

Ex: Bestäm rang, nolldimension och bas för nollrummet för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösning:

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad 5x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad -5x_3 + 3x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -s - \frac{1}{5}t \\ x_2 = s \\ x_3 = \frac{3}{5}t \\ x_4 = \quad t \end{cases}$$

$\implies$ rang $A = 2$, nolldim $A = 2$

Bas för nollrummet $(-1,1,0,0)$, $(-\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, 1)$.