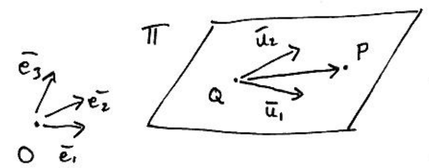
Föreläsning 4 (1)

3.3. Planets ekvation

Vilka egenskaper utmärker ett plan?



Egenskaper:
- lutning (ges av två riktn.vektorer)
- läge (punkt)

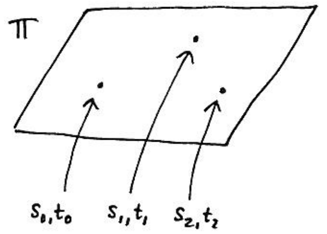
Välj en punkt Q och två icke-parallella vektorer $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ i planet (bas för planet). En punkt P ligger i Π precis då $\overline{QP} = s\bar{u}_1 + t\bar{u}_2$ för några tal s,t.

Om $Q:(x_0,y_0,z_0)$, $P:(x,y,z)$, $\bar{u}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\bar{u}_2=(a_2,b_2,c_2)$, så gäller

$$\begin{aligned} P \text{ ligger i } \Pi \iff \overline{QP} &= (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ &= s(a_1,b_1,c_1) + t(a_2,b_2,c_2) \\ &= s\bar{u}_1 + t\bar{u}_2 \end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t \end{cases}}$$ ekvation för Π på parameterform

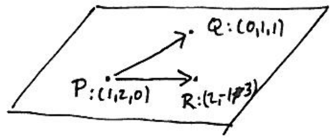
(2)



Varje par s,t ger upphov till en punkt i planet.

Ex: Bestäm en ekvation på param.form för planet Π som innehåller punkterna

$P:(1,2,0)$, $Q:(0,1,1)$ o $R:(2,-1,-3)$.



Vi behöver två riktn.vektorer och en punkt!

Riktn.vektorer: $\bar{u}_1 = \overline{PQ} = (0,1,1)-(1,2,0) = (-1,-1,1)$
$\bar{u}_2 = \overline{PR} = (2,-1,-3)-(1,2,0) = (1,-3,-3)$

Observera att $\bar{u}_1$ o $\bar{u}_2$ är icke-parallella (Varför?)

Välj punkt, t.ex. $P:(1,2,0)$.

$$\begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = 2 - s - 3t \\ z = \quad s - 3t \end{cases}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Ex: Ligger punkten $S:(-3,10,10)$ i planet Π ovan?

(3)

Finn s o t så att

Gaussel.

$$\begin{cases} -3 = 1 - s + t \\ 10 = 2 - s - 3t \\ 10 = \quad s - 3t \end{cases} \iff \begin{cases} -s + t = -4 \\ -s - 3t = 8 \\ s - 3t = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Svar: Ja!

En punkt $S:(x,y,z)$ ligger alltså i Π precis då ekv.systemet har lösning i s och t, dvs.

$$\begin{cases} x = 1 - s + t \\ y = 2 - s - 3t \\ z = \quad s - 3t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - s - t \\ 3x + y = 5 - 4s \\ 3x + z = 3 - 2s \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - s - t \\ 3x + y = 5 - 4s \\ -3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

Systemet har lösning i s o t precis då ekvationen $-3x + y - 2z = -1$ är uppfylld!

$$\boxed{S:(x,y,z) \text{ ligger i } \Pi \iff -3x + y - 2z + 1 = 0}$$

Kallas planets ekvation på affin form.

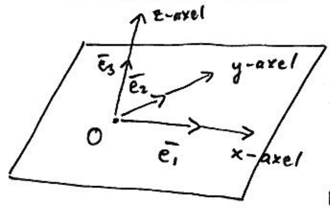
Varje plan Π kan skrivas på affin form

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(minst en av $A,B,C \neq 0$)

(4)

Def (Koordinatplan)



Kallas xy-planet

Ekv. på param.form: $\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

Ekv. på affin form: $z = 0$

Finns även xz-planet och yz-planet.

Ex: Ligger punkten $P:(3,1,-2)$ i planet

$\Pi: -3x + y - 2z + 1 = 0$?

Svar: Nej, ty $-3\cdot 3 + 1 - 2\cdot(-2) + 1 = -3 \neq 0$.

Ex: Ligger punkten $P:(3,0,-2)$ i xz-planet?

Svar: Ja, xz-planet har ekvationen $y = 0$.

Ex: Bestäm skärningen mellan planen

$\Pi: -3x + y - 2z + 1 = 0$ och $\Pi': 2x - y + 4z + 2 = 0$

Lösning: En punkt $P:(x,y,z)$ ligger i bägge planen då

$$\begin{cases} -3x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + 4z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + y - 2z + 1 = 0 \\ \quad -y + 8z + 8 = 0 \end{cases}$$

[Sätt $z = t$] $\iff \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 8 + 8t \\ z = \quad t \end{cases}$ en linje!

(5)

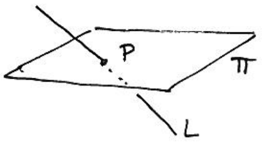
Ex: Bestäm skärningen mellan planet
$\Pi: -3x+y-2z+1=0$ och linjen
$L: (x,y,z) = (2,1,1) + t(1,-3,3)$.

Lösning: Sätt in L:s punkter i Π:s ekvation:

$$-3(2+t) + (1-3t) - 2(1+3t) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{2}$$

Svar: Π och L skär varandra i $P: \left(2-\frac{1}{2}, 1-3(-\frac{1}{2}), 1+3(-\frac{1}{2})\right)$
$= (3/2, 5/2, -1/2)$



Ex: Skriv planet $\Pi: -3x+y-2z+1=0$ på parameterform!

Sätt t.ex. $y=s$ och $z=t$: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$

Sats: Planen $\Pi_1: ax+by+cz+d=0$
$\Pi_2: ax+by+cz+d'=0$
är parallella för alla d och d'.

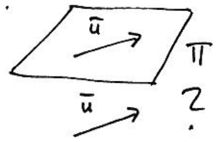
Bevis: Bestäm skärningen! $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax+by+cz+d'=0 \end{cases}$ (−1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ d'-d=0 \end{cases}$ Om $d' \neq d$ saknas lösning; om $d'=d$ är planen lika

(6)

Två plan som ej är parallella måste skära varandra i en linje. Alltså måste Π_1 & Π_2 vara parallella!
VSB!

Ex: Är $\bar{u} = (2,1,-3)$ parallell med (ligger i) planet $\Pi: 2x-y+z+4=0$?



Lösning: Planet $\Pi: 2x-y+z+4=0$ är parallellt med $\Pi': 2x-y+z=0$ enligt Sats, och Π' innehåller origo $O:(0,0,0)$.
Vektorn $\bar{u}$ ligger i Π' om punkten $P:(2,1,-3)$ ligger i Π! (därför)

Vi kollar: $2\cdot 2 - 1 + (-3) = 0$ OK!

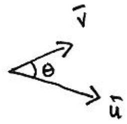
Alltså, punkten P ligger i Π'

$\Rightarrow \bar{u} = \overline{OP}$ ligger i Π' $\Rightarrow \bar{u}$ ligger i Π.

Svar: Ja

Läs s.50 – "Linjer i planet" själva!

4.1 Skalärprodukt



$$\boxed{\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta}$$

($|\bar{u}|$ = längden av $\bar{u}$)

(7)

Detta kallas skalärprodukt mellan/av $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

Ex:

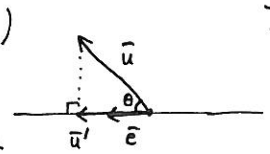
$|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$

$\Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta =$
$= 2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{3}}$

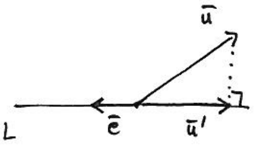
Geometrisk tolkning:

A) Låt $\bar{e}$ vara enhetsvektor, d.v.s. $|\bar{e}| = 1$.

I)



II)



$\bar{u}\cdot\bar{e} = |\bar{u}|\cdot\underbrace{|\bar{e}|}_{=1}\cdot\cos\theta = |\bar{u}|\cos\theta$

och $|\bar{u}|\cos\theta$ är längden av $\bar{u}'$ (med tecken).

Vi får därför $\bar{u}' = (|\bar{u}|\cos\theta)\bar{e} = (\bar{u}\cdot\bar{e})\bar{e}$

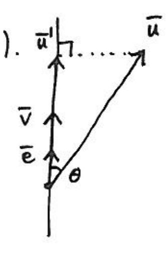
Vektorn $\bar{u}'$ kallas den ortogonala projektionen av $\bar{u}$ på L (ortogonal = vinkelrät).

B) Antag $\bar{v}$ ej enhetsvektor ($|\bar{v}| \neq 1$).

Då är $\bar{e} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}$ enhetsvektor, och

$\bar{u}' = (|\bar{u}|\cos\theta)\bar{e} = (|\bar{u}|\cos\theta)\frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}$

$= \left(\frac{|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta}{|\bar{v}|^2}\right)\bar{v} = \frac{(\bar{u}\cdot\bar{v})}{|\bar{v}|^2}\bar{v}$

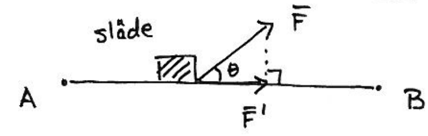


(8)

Projektionsformeln:

$$\bar{u}' = \frac{(\bar{u}\cdot\bar{v})}{|\bar{v}|^2}\bar{v}$$

Ex:



Släde på is. Släden flyttas från A till B.

Totalt arbete: $W = |\bar{F}'|\cdot|\overline{AB}| = |\bar{F}|\cos\theta\,|\overline{AB}| =$
$= |\bar{F}||\overline{AB}|\cos\theta = \bar{F}\cdot\overline{AB}$

skalärprodukt.