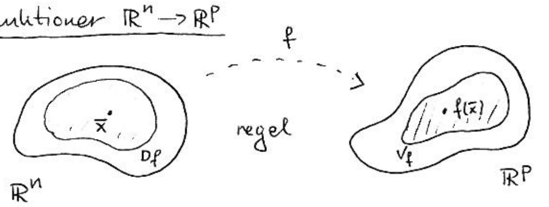
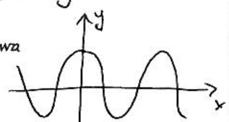
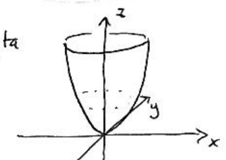
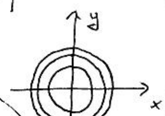
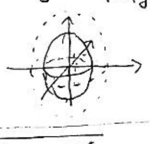
Föreläsning 5

①

Funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$



Förra gången reellvärda funktioner ($p=1$):

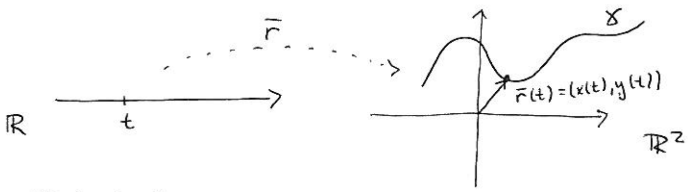
Typ	Exempel	Geometrisk tolkning	
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	graf/funktionskurva $y = f(x)$	
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f(x,y) = x^2+y^2$	graf/funktionsyta $z = f(x,y)$	
		eller	
		nivåkurvor $f(x,y) = C$	
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$	nivåytor $f(x,y,z) = C$ "skal"	
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$	??	

②

Denna gång vektorvärda funktioner ($p \geq 2$):

Funktioner av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

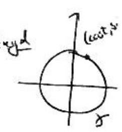
En funktion $\bar{r}$ av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avbildar tal t ($\mathbb{R}$) på punkter/vektorer $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ i planet ($\mathbb{R}^2$):



Värdemängden blir då en kurva γ, och vi säger att $\bar{r}$ är en parametrisering av kurvan. Ett exempel är

$$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

komponentfunktioner definitionsmängd



som parametriserar enhetscirkeln.

Anm: Kurvor kan parametriseras på flera olika sätt, exempelvis är även

$$\bar{r}_1(t) = (\cos 2t, \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

en parametrisering av enhetscirkeln.

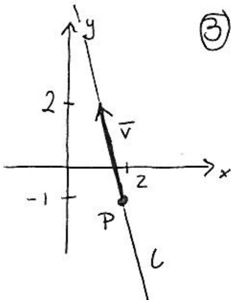
Ex: Linjen l i planet som går genom punkten $P: (2,-1)$ och har riktningsvektor $\bar{v} = (-1,3)$ ges av

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

③

En parametrisering av l ges alltså av

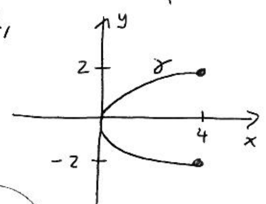
$$\bar{r}(t) = (2-t, -1+3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Ex: Funktionen

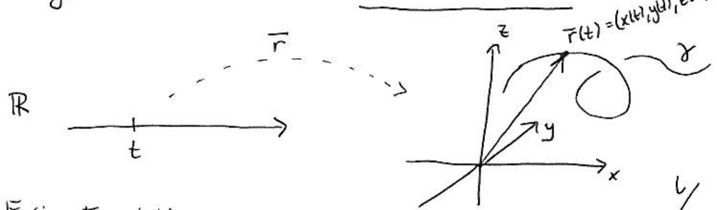
$$\bar{r}(t) = (t^2, t), \quad -2 \leq t \leq 2,$$

parametriserar en "vriden" (del av en) parabel:



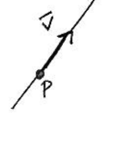
Funktioner av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Värdemängden γ till en funktion $\bar{r}$ av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ blir en kurva i rummet:



Ex: Funktionen

$$\bar{r}(t) = (2+2t, -t, -1+t), \quad t \in \mathbb{R},$$



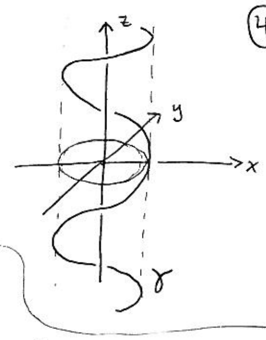
av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ är en parametrisering av linjen l i rummet som går genom (t.ex.) punkten $P: (2,0,-1)$ och har riktn.vektor $\bar{v} = (2,-1,1)$,

④

Ex. Funktionen

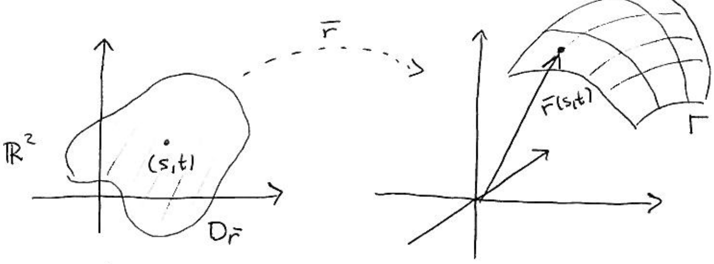
$$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

beskriver en spiral kring z-axeln



Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

En funktion $\bar{r}$ av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ avbildar punkter (s,t) i planet på punkter $\bar{r}(s,t)$ i rummet:



Värdemängden blir en yta Γ. Vi säger att $\bar{r}$ är en parametrisering av Γ. En funktion $\bar{r}$ av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ kan uttryckas

$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)).$$

Observera att komponentfunktionerna nu är funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Varför en yta? ⑤

Om vi fixerar t.ex. $s=s_0$, så blir

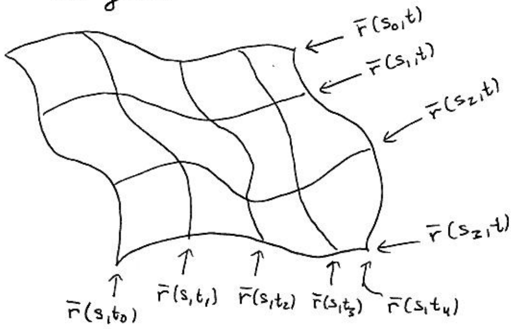
$$\bar{g}(t)=\bar{r}(s_0,t)$$

en funktion av typen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, och ger en kurva i rummet.
På motsv. sätt får vi om vi fixerar $t=t_0$:

$$\bar{h}(s)=\bar{r}(s,t_0),$$

och även denna svarar mot en kurva.
Genom att fixera olika s och t så får vi ett "rutnät" av kurvor – en yta!

s_i, t_i konstanter

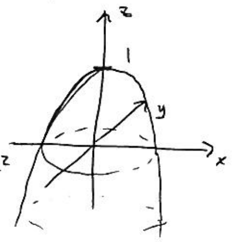


Ex: En parametrisering av den "upp-o-nervända" paraboloiden

$$z=1-(x^2+y^2)$$

ges (t.ex.) av

$$\bar{r}(s,t)=(s,t,1-(s^2+t^2)),\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2$$



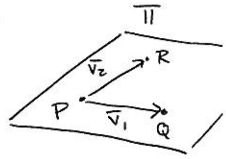
Ex: Planet Π som går genom punkterna $P:(1,2,0)$, $Q:(-2,-1,1)$ och $R:(1,3,1)$ har (t.ex.) riktn.-vektorerna

$$\bar{v}_1=\overline{PQ}=(-2,-1,1)-(1,2,0)=(-3,-3,1)$$
$$\bar{v}_2=\overline{PR}=(1,3,1)-(1,2,0)=(0,1,1)$$

(icke-parallella). Således kan planet beskrivas

$$\begin{cases} x = 1 - 3s \\ y = 2 - 3s + t \\ z = + s + t \end{cases}$$

punkten P $\quad \bar v_1 \quad \bar v_2$



Med andra ord har planet parametriseringen

$$\bar{r}(s,t)=(1-3s,2-3s+t,s+t),\quad (s,t)\in\mathbb{R}^2 \quad \square$$

Ex: Sfären med radie 2 och medelpunkt origo kan i rymdpolära koordinater uttryckas

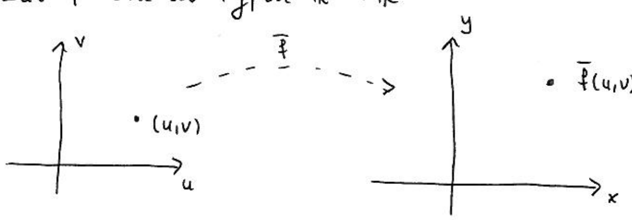
$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\sin\varphi, \quad 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

(Repetera från förra föreläsningen!). Således blir en parametrisering

$$\bar{r}(\theta,\varphi)=(2\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta),\quad \begin{matrix}0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{matrix} \quad \square$$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ⑦

Låt $\bar{f}$ vara av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$



Ett sätt att tolka $\bar{f}$ är som ett koordinatbyte i planet:

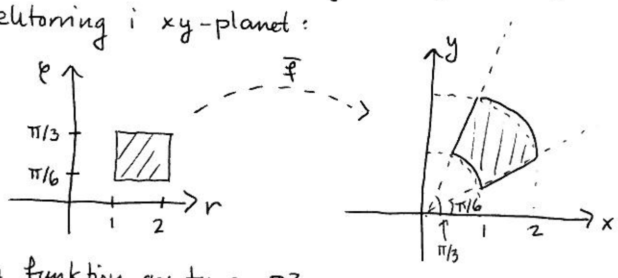
Ex: Det polära koordinatsambandet

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

kan ses som en funktion av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$\bar{f}(r,\varphi)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Med t.ex. definitionsmängden $1\le r\le 2$, $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$, så avbildar $\bar{f}$ en rektangel i $r\varphi$-planet på en sektorring i xy-planet:



En funktion av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$) kallas även en transformation.

Ex: Ett rymdpolärt koordinatbyte ⑧

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

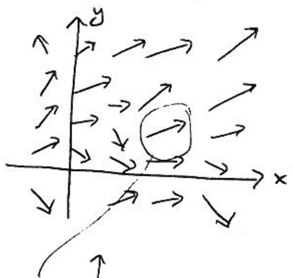
kan tolkas som en funktion av typen $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, från $r\theta\varphi$-rummet till xyz-rummet:

$$\bar{f}(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

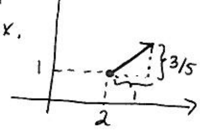
Alternativ tolkning ($\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$) — vektorfält!

$\bar{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

vektorfält i planet



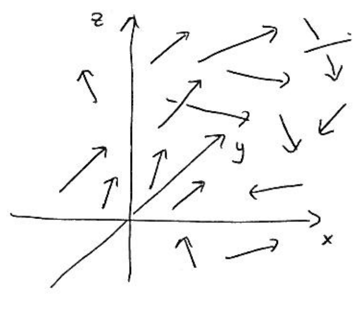
t.ex.



$\bar{f}(2,1)=(1,\frac{3}{5})$

$\bar{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

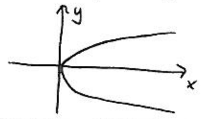
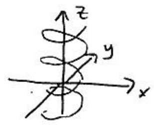
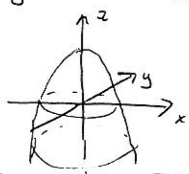
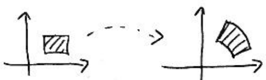
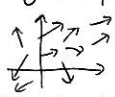
vektorfält i rummet



Exempelvis kan dessa motsvara

- kraftfält
- vätska som strömmar
- elektriskt fält
- vindfält

Sammanfattning vektorvärda funktioner:

Typ	Exempel	Geometrisk tolkning
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	$\bar{r}(t) = (t^2, t)$	kurva i planet 
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$	kurva i rummet 
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$\bar{r}(s,t) = (s, t, 1-(s^2+t^2))$	yta i rummet 
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$\bar{f}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$	 koordinatbyte i planet **eller**  vektorfält i planet
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\bar{f}(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$	koordinatbyte i $\mathbb{R}^3$ **eller** vektorfält i $\mathbb{R}^3$