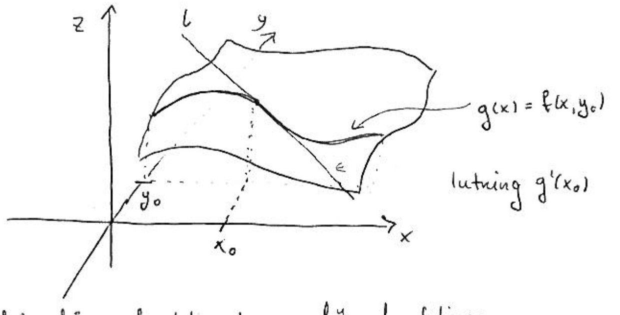
Föreläsning 4 (1)

Partiella derivator

Betrakta funktionsytan till en funktion $f(x,y)$ (av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) och skär denna med planet $y=y_0$.



Vi får då en funktionskurva för funktionen

$$g(x)=f(x,y_0)$$

i en variabel (i x). Nu kan vi precis som tidigare i envariabelanalysen beräkna lutningen av varje tangent l längs denna kurva. I punkten (x_0,y_0) får vi lutningen $g'(x_0)$. Denna lutning kallas den partiella derivatan av f i (x_0,y_0) med avseende på variabeln x, och betecknas

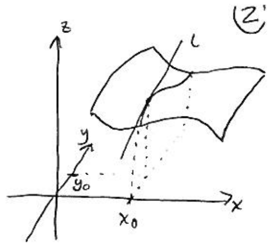
$$f'_x(x_0,y_0) \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Definition:
$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

(2)

På motsvarande sätt inför vi den partiella derivatan med avseende på y. Beteckning

$$f'_y(x_0,y_0) \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$



Vi kan på motsv. sätt definiera partiella derivator för funktioner m.a.p tre eller fler variabler (se läroboken).

Hur beräknar man partiella derivator?

Metod:
- (Derivata m.a.p. x) Betrakta alla y som konstanter och derivera som vanligt.
- (Derivata m.a.p. y) Betrakta alla x som konstanter!

Ex: Beräkna f'_x & f'_y för $f(x,y)=x^3y^2$.

Lösning: För f'_x så betraktar vi y^2 som en konstant (den bara "följer med")

$$f'_x = 3x^2y^2.$$

På samma sätt för vi

$$f'_y = 2x^3y$$

(3)

Vanliga deriveringsregler gäller:

Ex: För $f(x,y)=y e^{xy}$ får vi

$$f'_x = y\cdot e^{xy}\cdot y = y^2e^{xy} \quad \text{(kedjeregeln, inre derivata)}$$
$$f'_y = 1\cdot e^{xy} + y\,e^{xy}\cdot x = (1+xy)e^{xy} \quad \text{(prodregeln + kedjeregeln)} \quad \square$$

Ibland behöver vi hitta primitiver "partiellt", och då är det viktigt att tänka på följande:

Envariabelfallet: $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=C$ (konstant)

Flervariabelfallet: $f'_x(x,y)=0 \Rightarrow f(x,y)=\varphi(y)$, där φ godtycklig funktion i en variabel, eftersom allt som innehåller y ses som konstant då vi beräknar f'_x!

Ex: Finns $f(x,y)$ sådan att $\begin{cases} f'_x = 3x^2y+y^2 & (1) \\ f'_y = x^3+2xy+3y^2 & (2) \end{cases}$?

Lösning: (1) ger $f(x,y)=x^3y+xy^2+\varphi(y)$.
Derivering av denna m.a.p. y ger $f'_y = x^3+2xy+\varphi'(y)$, vilket skall jämföras med (2)
$\Rightarrow$ stämmer med $\varphi'(y)=3y^2 \Rightarrow \varphi(y)=y^3+C$.

Svar: Ja, $f(x,y)=x^3y+xy^2+y^3+C$ (kolla!).

(4)

Ex: Finns $f(x,y)$ sådan att $\begin{cases} f'_x = x+x^2y & (1) \\ f'_y = \frac{1}{3}x^3+xy & (2) \end{cases}$?

Lösning: (1) ger $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3y+\varphi(y)$.
Derivering m.a.p. y ger $f'_y = 0+\frac{1}{3}x^3+\varphi'(y)$.
Jämför med (2): Vi får $\varphi'(y)=xy$, vilket ej fungerar då xy både beror av x och y!

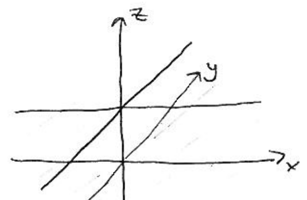
Svar: Nej! $\square$

I en variabel gäller f deriverbar $\Rightarrow f$ kontinuerlig.
Detta gäller inte nu:

Ex: Betrakta
$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{om } x=0 \text{ eller } y=0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi får grafen $z=f(x,y)$ till höger. Funktionen är partiellt deriverbar i origo med

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0,$$



men ej kontinuerlig där (tänk!)

Vi inför därför begreppet differentierbarhet:

I en variabel har vi

$f(x)$ deriverbar i $x=a$ med derivata A

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A \Leftrightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\rho(h)$$

där $\lim_{h\to 0}\rho(h)=0$. En omskrivning ger

$$f(a+h)-f(a)=Ah+\rho(h)\cdot h, \quad \text{där } \lim_{h\to 0}\rho(h)=0.$$

Generaliserar vi detta till flera variabler, t.ex. två, så får vi

$$\boxed{f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\rho(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2}, \quad \text{där } \lim_{(h,k)\to(0,0)}\rho(h,k)=0.} \qquad (*)$$

Funktionen $f(x,y)$ sägs vara differentierbar i (a,b) om det finns tal A och B och en funktion $\rho(h,k)$ som uppfyller $(*)$. (Se även sidan 107 för diff.barhet av funktion av tre variabler.)

Man kan visa att en differentierbar funktion är

- kontinuerlig (Sats 4.2)
- partiellt deriverbar, dvs. alla partiella derivator existerar. Dessutom är $A=f'_x(a,b)$, $B=f'_y(a,b)$. (Sats 4.1)

Ex: Avgör om

$$f(x,y)=xy$$

är differentierbar i punkten $(1,-1)$.

$$f(1+h,-1+k)-f(1,-1)=(1+h)(-1+k)-1\cdot(-1)=$$

$$=-1-h+k+hk+1=\underset{A}{(-1)}\cdot h+\underset{B}{1}\cdot k+hk$$

Det gäller att $hk=\underbrace{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{=\rho(h,k)}\cdot\sqrt{h^2+k^2}$,

och räcker att visa att $\rho(h,k)=\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$

Polära koord:

$$0\le|\rho(h,k)|=\left|\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\right|=r\underbrace{|\cos\varphi|}_{\le 1}\underbrace{|\sin\varphi|}_{\le 1}\le r\to 0$$

då $r\to 0$,

och vi är klara.

Svar: Ja, den är diff.bar i $(1,-1)$ och $f'_x(1,-1)=A=-1$, $f'_y(1,-1)=B=1$. □

Som synes är det jobbigt att visa differentierbarhet, så i praktiken använder man följande sats.

Sats (4.3, s.106): Antag att f'_x o f'_y är definierade i en omgivning av (a,b). Då gäller

f'_x, f'_y kontinuerliga i (a,b) $\Rightarrow$ f är differentierbar i (a,b)

I princip så blir alla "vanliga" elementära funktioner differentierbara.

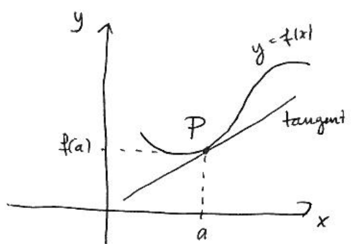
Tangentplan

Repetition (envariabelanalys).

Tangenten i punkten P har ekvationen

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

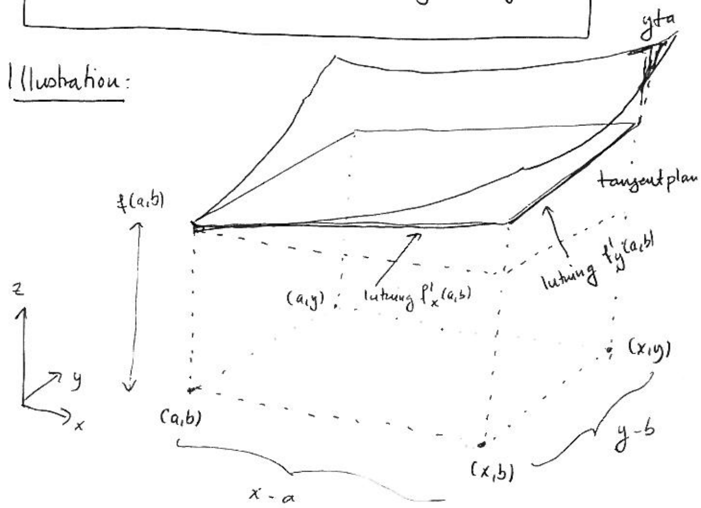
(eller $y-f(a)=f'(a)(x-a)$).



För funktionsytan $z=f(x,y)$ blir motsvarigheten till tangent ett helt plan som "tangerar" (tänk!). Derivatorna f'_x o f'_y anger lutningen i x-led resp. y-led, så tangentplanet i punkten $(a,b,f(a,b))$ får ekvationen

$$\boxed{z=f(a,b)+f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)}$$

Illustration:



Ex: Bestäm en ekvation för tangentplanet till

$$z=f(x,y)=x^2+xy$$

i punkten $P:(1,2,3)$.

Lösning: Kolla först att punkten ligger på ytan: $3=1^2+1\cdot 2$ OK!

Vi får $\begin{cases} f'_x=2x+y \\ f'_y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2)=4 \\ f'_y(1,2)=1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ekv blir $z=3+4(x-1)+1\cdot(y-2)$

$\Leftrightarrow$ $4x+y-z-3=0$ (ekv för plan!)

□