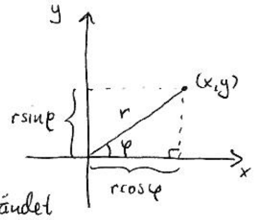
(1)

Föreläsning 2

Polära koordinater

En punkt (x,y) i planet kan alternativt beskrivas i polära koordinater (r,φ), där r är avståndet till origo och φ vinkeln med positiva x-axeln.

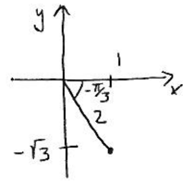


Koordinatsambandet blir

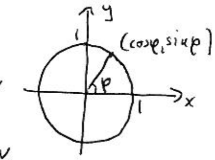
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Jämför med komplexa tal.

Ex: Punkten $(1,-\sqrt{3})$ har de polära koordinaterna $(2,-\frac{\pi}{3})$.

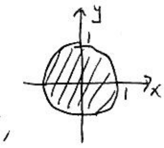


Ex: Enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ kan beskrivas $\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$, $0\le\varphi\le 2\pi$,



så i polära koordinater ges denna av $r=1$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Enhetscirkelskivan $x^2+y^2\le 1$ ges av



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,$$

och får de polära koordinaterna $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

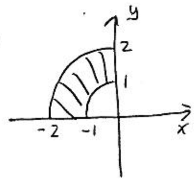
(2)

Ex: Sektorringen

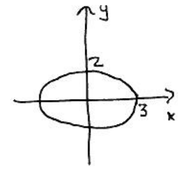
$$1\le x^2+y^2\le 4, \quad x\le 0,\ y\ge 0,$$

ges i polära koordinater av

$$1\le r\le 2,\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi.$$



Ex: Ellipsen $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ går att beskriva med $\begin{cases} x = 3\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}$, $0\le\varphi\le 2\pi$



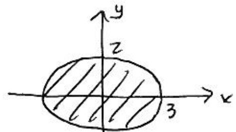
Notera att $\frac{(3\cos\varphi)^2}{3^2}+\frac{(2\sin\varphi)^2}{2^2}=\frac{3^2\cos^2\varphi}{3^2}+\frac{2^2\sin^2\varphi}{2^2}=$
$=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$.

För att beskriva ellipsskivan $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}\le 1$, så måste vi blanda in r:

$$\begin{cases} x = 3r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi. \quad (*)$$

□

Koordinaterna av typen i $(*)$ kallas ellipspolära.



Ex: Beskriv ellipsskivan

$$4x^2+9y^2+8x-36y+39\le 0$$

i ellipspolära koordinater.

(3)

Vi kvadratkompletterar:

$$4(x^2+2x)+9(y^2-4y)+39\le 0$$

$$\Leftrightarrow\ 4\left((x+1)^2-1\right)+9\left((y-2)^2-4\right)+39\le 0$$

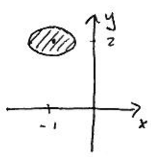
$$\Leftrightarrow\ 4(x+1)^2+9(y-2)^2\underbrace{-4-36+39}_{=-1}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{(x+1)^2}{(1/2)^2}+\frac{(y-2)^2}{(1/3)^2}\le 1$$

Ellipsskiva med halvaxlar 1/2 & 1/3 samt medelpunkt $(-1,2)$

Den kan ellipspolärt beskrivas

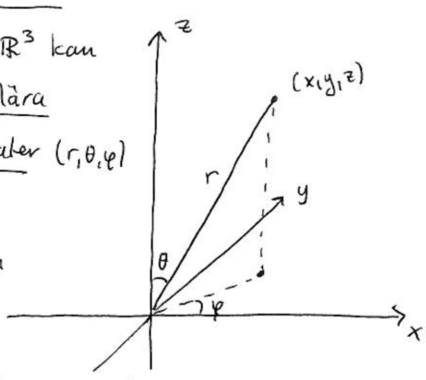
$$\begin{cases} x = -1+\frac{1}{2}r\cos\varphi \\ y = \underset{\uparrow\ \text{OBS!}}{2}+\frac{1}{3}r\sin\varphi \end{cases}, \quad 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$



□

Rymdpolära koordinater

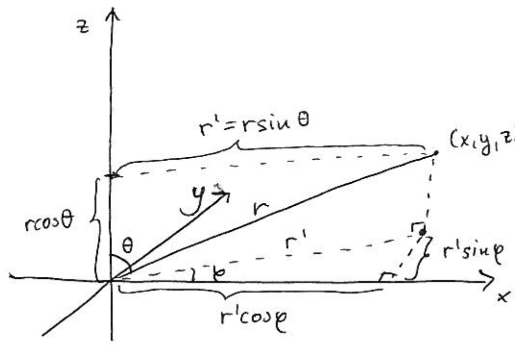
En punkt (x,y,z) i $\mathbb{R}^3$ kan beskrivas i rymdpolära (sfäriska) koordinater (r,θ,φ) enligt figur:



Normalt är φ mellan 0 och 2π och θ mellan 0 och π (obs!)

(Jämför latitud och longitud!)

(4)



Koord. samband:

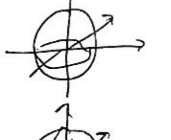
$$\begin{cases} x = r'\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r'\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Ex: Sfären med radie 2 och medelpunkt origo har rymdpol. koord.

$$r=2,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$$

Motsvarande klot har koord.

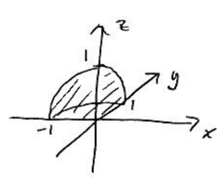
$$0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi$$



□

Ex: Rita mängden med rymdpol. koordinater

$$0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi\ !$$



Enhetsklotet i en av oktanterna.

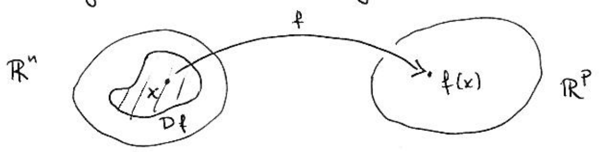
Anm1: Det går även att införa "ellipsvarianter" och att "förskjuta" rymdpolära koordinater.

Anm2: Läs cylindriska koordinater själva!

(5)

Funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

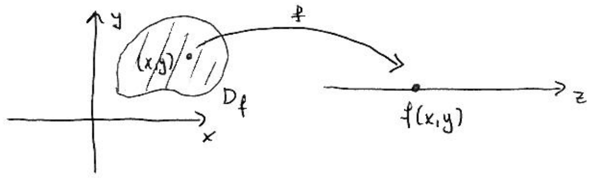
En funktion f består av en definitionsmängd D_f (delmängd av $\mathbb{R}^n$) och en regel:



Om $p=1$ sägs f vara reellvärd, om $p \geq 2$ vektorvärd.

Reellvärda funktioner

En funktion $f(x,y)$ av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avbildar punkter (x,y) i planet ($\mathbb{R}^2$) på tal ($\mathbb{R}$):



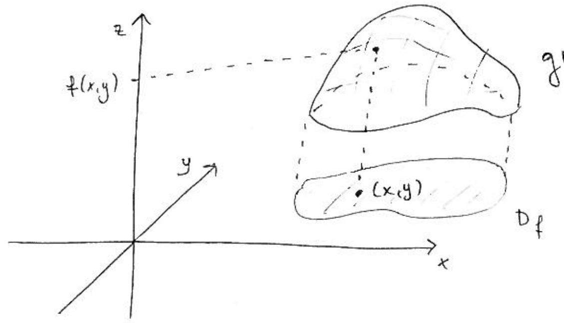
Ett exempel är

$$f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}.$$

Denna har den naturliga definitionsmängden $9-(x^2+y^2) \geq 0 \iff x^2+y^2 \leq 9$, dvs. cirkelskivan med radie 3 och medelpunkt origo.

Grafen $z = f(x,y)$ till en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ blir en yta:

(6)



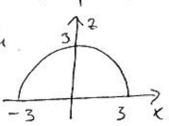
Ex: Rita grafen $z = f(x,y)$ till

$$f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}, \qquad x^2+y^2 \leq 9.$$

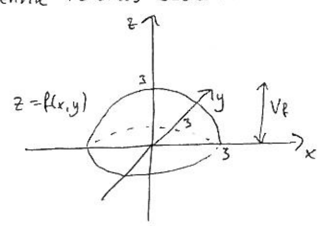
Grafen $z = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$ är rotationssymmetrisk kring z-axeln. Räcker därför att kolla skärningen med t.ex. xz-planet $y=0$:

$$z = \sqrt{9-x^2}$$

Eftersom $z = \pm\sqrt{9-x^2} \iff z^2 = 9-x^2 \iff x^2+z^2=9$, dvs. cirkel med radie 3 o medelp. origo i xz-planet så är $z=\sqrt{9-x^2}$ den övre halvcirkeln



Denna roteras sedan:



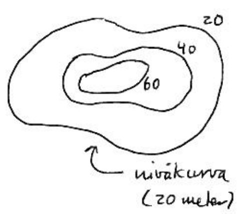
en halvsfär!

$V_f = [0,3]$, värdemängd

(7)

Nivåkurvor

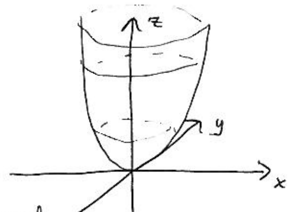
Ett annat sätt att åskådliggöra funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är nivåkurvor. Tänk på en karta över ett terrängavsnitt: Nivåkurvorna ger en bra tvådimensionell bild av terrängen (ytan) i tre dimensioner.



Ex: Grafen till funktionen

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

är paraboloiden $z = x^2+y^2$.



Vi vill nu beskriva denna yta med nivåkurvor:

$$f(x,y) = C \quad \longleftarrow \text{"höjden"}$$

$C=0$: $f(x,y)=0 \iff x^2+y^2=0 \iff$ punkten $(0,0)$

$C=1$: $f(x,y)=1 \iff x^2+y^2=1$ cirkel med radie 1

$C=2$: $f(x,y)=2 \iff x^2+y^2=2$ cirkel med radie $\sqrt{2}$

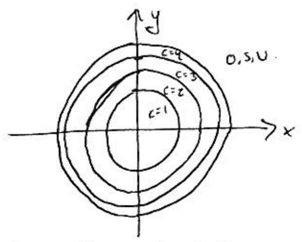
$C=3$: $f(x,y)=3 \iff x^2+y^2=3$ cirkel med radie $\sqrt{3}$

$C=4$: $f(x,y)=4 \iff x^2+y^2=4$ cirkel med radie 2

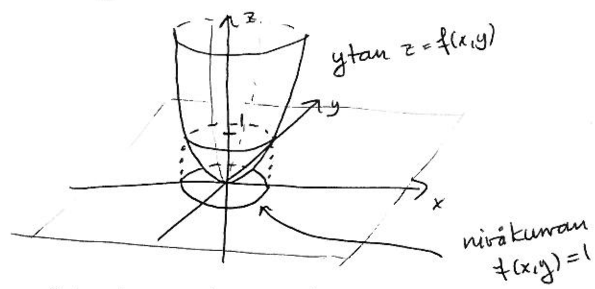
o.s.v.

(8)

För ytan $z = x^2+y^2$ får vi därför följande "karta":



Verkar rimligt att denna beskriver paraboloiden.



Vi kan inte rita grafen $w = f(x,y,z)$ till en funktion f av tre variabler ($f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Det hade då behövts fyra rumsdimensioner. Däremot kan vi rita en sådan funktions nivåytor:

$$f(x,y,z) = C \quad \longleftarrow \text{"höjden"}$$

Ex: För $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ blir nivåytorna ellipsoider: