Föreläsning 20

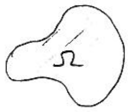
1

Förra föreläsningen såg vi att

$$(P,Q) \text{ potentialfält} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

men att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \not\Rightarrow (P,Q) \text{ potentialfält}.$$



Omvändningen gäller dock med en extra förutsättning på definitionsmängden Ω.

Vi visar först följande delresultat:

> **Sats:**
> Ω bågvis sammanhängande
> (P,Q) vektorfält på Ω
> Om $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ är oberoende av vägen,
> så är (P,Q) ett potentialfält på Ω.

Bevis ("skiss"): Vi ska konstruera en potentialfunktion U till (P,Q). Vi gör det på följande sätt.

$$U(x,y) = \int_\gamma P(s,t)\,ds + Q(s,t)\,dt,$$

2

där γ går från den fixa punkten (a,b) till den variabla punkten (x,y).

(jämför analysens huvudsats: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.) $\square$

Vi såg förra föreläsningen ett exempel där $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, men vi ej hade ett potentialfält. I det exemplet var definitionsområdet Ω ej enkelt sammanhängande.

Enkelt sammanhängande ≈ sammanhängande "utan hål"

enkelt sammanhängande ej enkelt sammanhängande

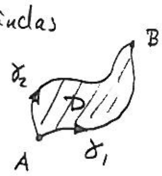
Om området är enkelt sammanhängande så gäller följande sats:

> **Sats:** Ω enkelt sammanhängande
> $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow (P,Q) \text{ potentialfält}$$

3

Bevis ("skiss"): Greens formel kan användas

$$\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = \iint_D 0 \,dx\,dy = 0$$

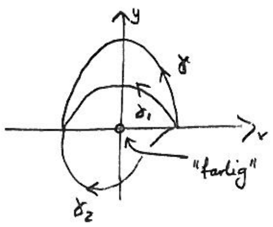


$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}, \quad \text{dvs.}$$

integral oberoende av väg $\Rightarrow$ (P,Q) potentialfält. $\square$

Tänk nu efter varför vi inte kan byta ut ellipsbiten i exemplet från förra föreläsningen mot t.ex. undre halvan av enhetscirkeln! Hur stort hade felet i svaret blivit?

$$\boxed{\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy}$$



γ_1 funkar!

γ_2 funkar ej!

Området ej enkelt sammanhängande, "hål" i origo.

Felet blir här 2π (jmfr. exempel förra förel.)

4

> **Sammanfattning:**
>
> ① $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ oberoende av vägen i Ω
>
> $\Uparrow \quad \Downarrow$ *)
>
> ② (P,Q) potentialfält i Ω
>
> **) $\Uparrow \quad \Downarrow$
>
> ③ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i Ω
>
> *) om Ω bågvis sammanhängande
> **) om Ω enkelt sammanhängande

Ex: Tyngdkraftfältet

$$(P,Q) = (0,-mg)$$

har potentialfunktionen $U(x,y) = -mgy$, så precis som vi vill är kurvintegralen (= arbetet) oberoende av vägval.