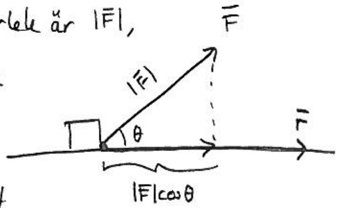
Föreläsning 18 ①

Vi ska nu integrera vektorer (eller rättare sagt ett vektorfält) över en kurva i xy-planet.

Motivering (fysik): Arbete = kraft · sträcka

Antag att vi drar ett föremål längs marken med kraften $\bar{F}$. Kraftens storlek är $|\bar{F}|$, och i rörelseriktningen är den $|\bar{F}|\cos\theta$.

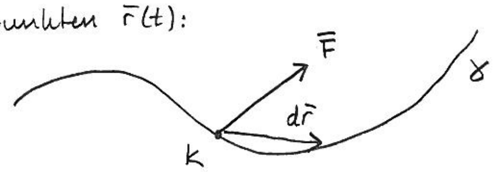


Om vi släpar föremålet vektorn $\bar{r}$, dvs. $|\bar{r}|$ långt, så blir arbetet

$$W = |\bar{F}|\cos\theta \cdot |\bar{r}| = \underline{\underline{\bar{F}\cdot\bar{r}}}$$

skalärprodukt

Antag nu att vi har en kurva γ parametriserad av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, och att en partikel K som rör sig längs γ påverkas av en kraft $\bar{F}(\bar{r}(t))$ i punkten $\bar{r}(t)$:



Under en kort tid dt förflyttar sig K ungefär ②

$d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot dt = \bar{r}'(t)\,dt$, och under denna tid så uträttar kraftfältet arbetet

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot d\bar{r} = \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt,$$

och över hela kurvan blir arbetet

$$\boxed{W = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt}$$

Med detta som motivering definierar vi kurvintegralen:

Vektorfält: $\bar{F}(\bar{r}) = (P(\bar{r}), Q(\bar{r})) = (P(x,y), Q(x,y))$

Kurva: $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$.

$$\boxed{\text{Kurvintegral: } \int_\gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(r(t))\cdot\bar{r}'(t)\,dt}$$

OBS! ③

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \big(P(x(t),y(t)), Q(x(t),y(t))\big)\cdot(x'(t), y'(t))\,dt =$$

$$= \boxed{\int_a^b \big(P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\,dt}$$

formel!

Anm: Kurvintegralen skrivs även

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy,$$

eftersom

$$\int_\gamma (Px' + Qy')\,dt = \int_\gamma \Big(P\frac{dx}{\cancel{dt}} + Q\frac{dy}{\cancel{dt}}\Big)\cancel{dt} =$$

$$= \int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

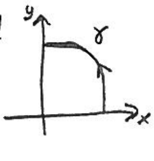
Ex: Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\gamma xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy,$$

där γ är enhetscirkeln i positiv led från $(1,0)$ till $(0,1)$.

Lösning: Vi kan parametrisera γ med

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t: 0 \to \tfrac{\pi}{2}$$



Nu har vi $\begin{cases} P(x,y) = xy \\ Q(x,y) = x^2+y^2 \end{cases}$ och $\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t\,dt \\ dy = \cos t\,dt \end{cases}$ ④

$$I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t\sin t}_{=P}\cdot\underbrace{(-\sin t)\,dt}_{=dx} + \underbrace{(\overbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}^{=1})}_{=Q}\cdot\underbrace{\cos t\,dt}_{=dy} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos t\sin^2 t + \cos t)\,dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3} + \sin t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

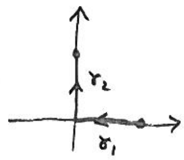
Ex: Samma vektorfält som ovan, men nu är $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$,

där γ_1: räta linjestycket från $(1,0)$ till $(0,0)$

γ_2: —— " —— $(0,0)$ till $(0,1)$

Lösning: Parametrisering

$$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \; t: 1 \to 0 \qquad \gamma_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \; t: 0 \to 1$$



$$\Rightarrow I = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} =$$

$$= \int_1^0 (t\cdot 0\cdot 1 + (t^2+0^2)\cdot 0)\,dt +$$

$$+ \int_0^1 (0\cdot t\cdot 0 + (0^2+t^2)\cdot 1)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

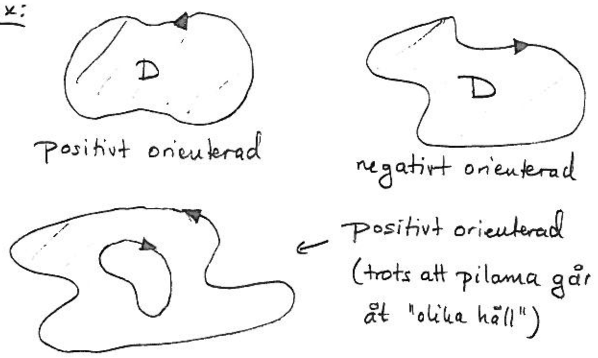
Anm: I båda exemplen har vi rört oss från $(1,0)$ till $(0,1)$, men längs olika vägar, och fått olika resultat.

(återkommer till detta!)

Greens formel: (5)

Randen ∂D till ett område D i planet kan vi se som en (eller flera) kurvor. Vi ger nu ∂D en riktning och säger att ∂D är <u>positivt orienterad</u> om vi har D på vänster sida när vi genomlöper ∂D.

Ex:



Det finns en sats (Greens formel) som knyter samman en <u>dubbelintegral</u> med en <u>enkelintegral</u> över randen:

> **Sats (Greens formel)**
>
> $P(x,y)$, $Q(x,y)$ funktioner, D kompakt område i planet
> ∂D positivt orienterad rand
>
> $$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(Läs själv exakta förutsättningar, Sats 9.1, s.291) (6)

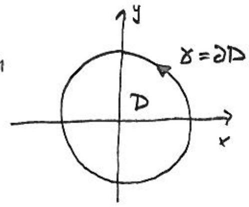
Ex: Beräkna

$$I = \int_\gamma y\,dx - x\,dy,$$

där γ är den positivt orienterade enhetscirkeln

Lösning: Direkt uträkning av

$\int_\gamma$ ger, med parametriseringen



$$\gamma: \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi: 0 \to 2\pi:$$

$$I = \int_0^{2\pi} (\sin\varphi\cdot(-\sin\varphi) - \cos\varphi\cdot\cos\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1}\,d\varphi = \underline{\underline{-2\pi}}.$$

Med Greens formel får vi, då $P = y$, $Q = -x$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 1 = -2,$$

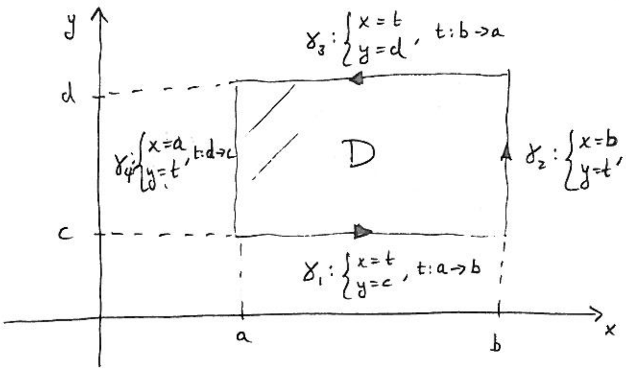
$$I = \iint_D -2\,dx\,dy = -2\underbrace{\iint_D 1\,dx\,dy}_{=\text{ arean av enhetscirkeln } = \pi} = \underline{\underline{-2\pi}}$$

stämmer!

□

Bevis av Greens formel: (7)

Endast i det enklaste fallet då D är en rektangel:



$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. Vi får

- $$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b (P(t,c)\cdot 1 + Q(t,c)\cdot 0)\,dt +$$

$$+ \int_c^d (P(b,t)\cdot 0 + Q(b,t)\cdot 1)\,dt + \int_b^a (P(t,d)\cdot 1 + Q(t,d)\cdot 0)\,dt +$$

$$+ \int_d^c (P(a,t)\cdot 0 + Q(a,t)\cdot 1)\,dt =$$

$$= \underline{\int_a^b (P(t,c) - P(t,d))\,dt + \int_c^d (Q(b,t) - Q(a,t))\,dt}$$

Vi studerar dubbelintegralen:

(8)

- $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right) dy$$

$$- \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) dx = \int_c^d \Big[Q(x,y)\Big]_a^b dy - \int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_c^d dx =$$

$$= \int_c^d (Q(b,y) - Q(a,y))\,dy - \int_a^b (P(x,d) - P(x,c))\,dx =$$

byt int.var.

$$= \underline{\int_c^d (Q(b,t) - Q(a,t))\,dt + \int_a^b (P(t,c) - P(t,d))\,dt}$$

dvs. $$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$ □