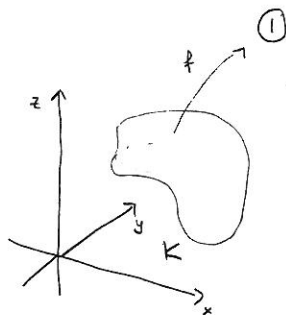


Föreläsning 16

Trippelintegraler:

$$\iiint_K f(x,y,z) dx dy dz$$

där  $K$  är en kropp i rummet.



Definieras på motsv. sätt som dubbelintegralen; vi approximerar med "trappfunktioner", funktioner som är konstanta på axelparallella "lådor".

Eftersom vi inte kan rita grafen till  $f$  så är det svårt att göra en geometrisk tolkning av integralen, men däremot kan vi göra en fysikalisk:

Om  $K$  kropp i rummet och  $\rho(x,y,z)$  anger densiteten av  $K$  i punkten  $(x,y,z)$  så är  $K$ 's massa

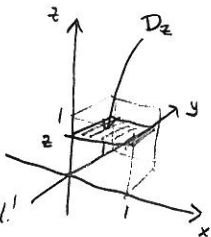
$$M = \iiint_K \rho(x,y,z) dx dy dz$$

(Motsv. resonemang med Riemannsommor som vi gjorde i en tidigare föreläsning.)

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 xy^2z^3 dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} xy^2z^4 \right]_0^1 dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{1}{4} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{4 \cdot 3} xy^3 \right]_0^1 dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{12} x dx = \left[ \frac{1}{24} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{24} // \end{aligned}$$

Alternativ (t.ex.):

$$I = \int_0^1 \left( \iint_{D_z} xy^2z^3 dx dy \right) dz = (*)$$



$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 xy^2z^3 dy \right) dx \right) dz = \\ &= \int_0^1 \left( \dots \right) dz = \dots = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$D_z$ :  
 $0 \leq x \leq 1$   
 $0 \leq y \leq 1$   
 "z=z"

Det finns alltså ett stort antal sätt att beräkna trippelintegraler!

Speciellt: Genom att sätta  $\rho(x,y,z) = 1$ , så gäller det att massan = volymen! Vi får alltså

$$V = \iiint_K 1 dx dy dz$$

Alternativt sätt att beräkna en volym!

Upprepad integration fungerar "som vanligt". Vi börjar med ett lådformat område  $K$ :

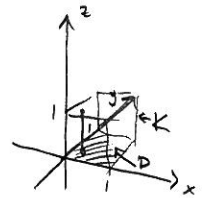
Ex: Beräkna

$$I = \iiint_K xy^2z^3 dx dy dz,$$

där  $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ .

Lösning:

$$I = \iint_D \left( \int_0^1 xy^2z^3 dz \right) dx dy = (*)$$



$D$  kvadraten  
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$   
 i  $xy$ -planet

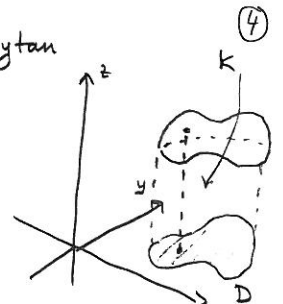
Vi får en "dubbelintegral av en enkelintegral!"

Ex: Beräkna volymen under ytan  $z = f(x,y)$

definierad på  $D$  i  $xy$ -planet

Lösning: Vi ska beräkna

$$V = \iiint_K 1 dx dy dz, \text{ där } K \text{ ges av } 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in D$$



Vi börjar med att integrera i  $z$ -led:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left( \int_0^{f(x,y)} 1 dz \right) dx dy = \iint_D [z]_0^{f(x,y)} dx dy = \\ &= \iint_D f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

Stämmer med tidigare kapitel!

Ex: Beräkna

$$I = \iiint_K z dx dy dz$$

där  $K$  är halvklotet  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ .

Lösning 1: Den övre ytan har

ekvation  $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ , och den undre  $z = 0$ .

Projicerar vi kroppen  $K$  i  $xy$ -planet för vi cirkelskivan  $D: x^2 + y^2 \leq 4$ . Alltså är

$$I = \iint_D \left( \int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z \, dz \right) dx dy = \iint_D \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D (4 - (x^2 + y^2)) dx dy =$$

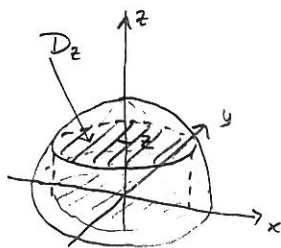
$$= \left[ \text{pol. koordin. } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, E: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_E (4 - r^2) \cdot r \, dr d\varphi = \frac{1}{2} \left( \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \left( \int_0^2 (4r - r^3) \, dr \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[ 2r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^2 = \pi (8 - 4) = \underline{\underline{4\pi}}$$

Lösning 2: Alternativt "enkeltintegral av dubbelintegral"

$D_z: x^2 + y^2 \leq 4 - z^2$   
cirkelskiva med radii  $\sqrt{4 - z^2}$   
 $\Rightarrow \text{arean} = \pi(4 - z^2)$



I figuren ser vi att

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{där } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Vi beräknar funktionaldeterminanten:

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \dots = \underline{\underline{r^2 \sin \theta}}$$

öring!  
För lov att  
memoreras!

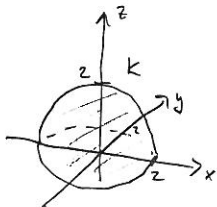
$0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow r^2 \sin \theta \geq 0$  så absolutbelopp behövs ej.

Ex (igen):  $I = \iiint_K z \, dx dy dz,$

där  $K$  är halvklotet  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ .

Lösning 3: Halvklotet ges i rymdpolära koordinater av

$$L: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}, \text{ så}$$



variabelbyte ger

Vi får

$$I = \int_0^2 \left( \iint_{D_z} z \, dx dy \right) dz =$$

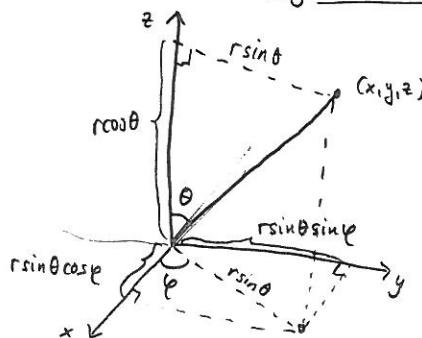
$$= \int_0^2 z \left( \iint_{D_z} 1 \, dx dy \right) dz = \int_0^2 z \cdot \text{arean av } D_z = \pi(4 - z^2) dz =$$

$$= \int_0^2 z \pi (4 - z^2) dz = \pi \int_0^2 (4z - z^3) dz =$$

$$= \pi \left[ 2z^2 - \frac{1}{4}z^4 \right]_0^2 = \underline{\underline{4\pi}} \quad \square$$

Variabelbyte

Fungerar som tidigare. Motsvarigheten till polära koordinater i rummet är rymdpolära koordinater:



$$I = \iiint_L r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi =$$

$$= \left( \int_0^2 r^3 \, dr \right) \left( \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) =$$

$$= \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{4\pi}} \quad \square$$

8

5

6

7