

Föreläsning 15

(1)

Generaliserade integraler: $\iint_D f(x,y) dx dy$

Hittills: Både området D och integranden $f(x,y)$ begränsade.

Nu: D eller $f(x,y)$ obegränsad. Generaliserad integral.

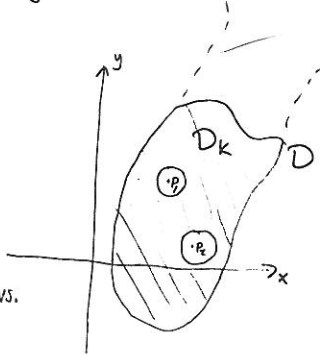
Man definierar en generaliserad integral på följande sätt:

Antag att D är obegränsad och att även $f(x,y)$ obegränsad nära t.ex. punkterna P_1 och P_2 . Vi bildar en

svit av (slutna, mätbara) mängder D_1, D_2, D_3, \dots

som uppfyller

- alla D_k begränsade
- f begr. i alla D_k
- $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots$
och $D_k \nearrow D$ då $k \rightarrow \infty$, dvs.
"sviten väcker ut mot D ".



Def: Om $I = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_k} f(x,y) dx dy$ existerar (ändligt) och är oberoende av sviten D_k , så säger vi att $\iint_D f(x,y) dx dy$ är konvergent med värde I .

Ex: Beräkna

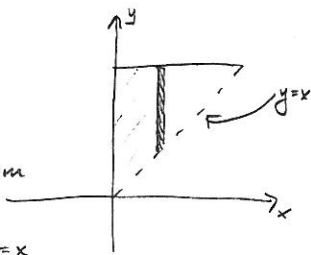
$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{y-x}} dx dy,$$

där $D: x < y \leq 1, x \geq 0$.

Lösning: Rita området!

Generaliserad integral eftersom

$\frac{1}{\sqrt{y-x}}$ obegr. nära linjen $y=x$.



$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}} dy \right) dx = \int_0^1 \left[2\sqrt{y-x} \right]_x^1 dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{1-x} dx = 2 \left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} \right]_0^1 = -\frac{4}{3}(0-1) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Anm: Egentligen $I = \int_0^1 \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x+\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}} dy \right) dx =$
= ... (Resultatet blir samma! Kolla!)

Ex: Beräkna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Lösning: Det finns ingen elementär primitiv till e^{-x^2} , men vi kan utnyttja en dubbelintegral på ett

Sats: Om $f(x,y) \geq 0$ på D så är gränsvärdet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_k} f(x,y) dx dy$$

oberoende av sviten D_k .

(2)

Om $f(x,y) \geq 0$ så kan vi räkna "som vanligt". Ett ändligt resultat betyder att integralen är konvergent, annars divergent.

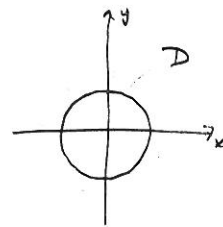
Ex: Beräkna

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy, \quad D: x^2+y^2 \geq 1$$

↑ obegr. område!

Lösning: Sätt $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow E: \begin{cases} r \geq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_E \frac{1}{(r^2)^2} \cdot r dr d\varphi = \\ &= \iint_E \frac{1}{r^3} dr d\varphi = \left(\int_1^{\infty} \frac{1}{r^3} dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_1^R \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}. \quad \square \end{aligned}$$

(3)

finnigt sätt för att beräkna I :

$$I^2 = I \cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy =$$

Obs! Ger samma resultat!

$$\stackrel{\text{som vanligt "baklägges"}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = J.$$

Polära koordinater $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ gör att \mathbb{R}^2 översgår i

$$E: \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}, \text{ så}$$

$$\begin{aligned} I^2 = J &= \iint_E e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi = \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi \right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}. \\ \Rightarrow I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \underline{\underline{\sqrt{\pi}}}. \quad \square \end{aligned}$$

Precis som i envariabelanalys har vi ett antal jämförelsesatser (s. 251):

Om $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ i D så gäller att

• $\iint_D g(x,y) dx dy$ konv. $\Rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy$ konv. (5)

• $\iint_D f(x,y) dx dy$ div. $\Rightarrow \iint_D g(x,y) dx dy$ div.

Ex: Visa att

$$I = \iint_D \frac{\arctan^2(xy)}{(x^2+y^2)^2} dx dy, \quad D: x^2+y^2 \geq 1,$$

är konvergent.

Lösning: $-\frac{\pi}{2} < \arctan(xy) < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 0 \leq \arctan^2(xy) < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow$$

$$0 \leq \frac{\arctan^2(xy)}{(x^2+y^2)^2} < \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{och}$$

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy \text{ är konvergent enligt tidigare}$$

exempel $\Rightarrow I$ konvergent.