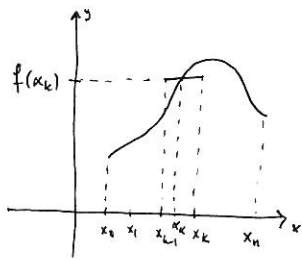


Föreläsning 14

(1)

Riemannsammor

1. envariabelanalys  
definierade vi  
Riemannsammor via

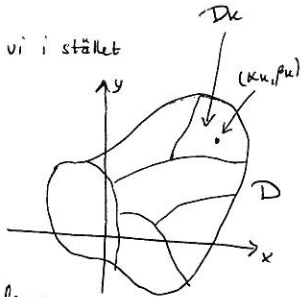


$$\sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

För  $f(x,y)$  definierad på  $D$  för vi i stället

$$\sum_{D_k \in D} f(x_k, y_k) \mu(D_k)$$

där  $\mu(D_k)$  är arean av  $D_k$ .



Om  $f$  är kontinuerlig och områdena

$D_k$  blir "mindre och mindre" så får vi

$$\sum_{D_k \in D} f(x_k, y_k) \mu(D_k) \rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy$$

(dvs. integral = "∞ summa av ∞ små delar")

Summa sak gällde i endimfallet.

Variabelbyte

(3)

1. envariabelanalys gällde, för ett byte  $x=zt$ , att

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(zt) \cdot z dt, \text{ eftersom } \frac{dx}{dt} = z \Rightarrow dx = z dt$$

Intervall  $I: -2 \leq x \leq 2$  ändras till intervall  $J: -1 \leq t \leq 1$ .

Om i stället  $x=-2t$  så får vi återigen  $J: -1 \leq t \leq 1$ :

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(-2t) \cdot (-2) dt = \int_{-1}^1 f(-2t) \cdot 2 dt,$$

och eftersom  $\frac{dx}{dt} = -2$  måste formeln bli

$$\int_I f(x) dx = \int_J f(x(t)) \left| \frac{dx}{dt} \right| dt$$

↖ abs. bet.!

Faktum  $\frac{dx}{dt}$  anger (med tecken) hur intervall  $I$

ändras till intervall  $J$ . Vi har tidigare sett att

funktionsdeterminanten  $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$  anger hur en

area i  $xy$ -planet förhåller sig storleksmässigt

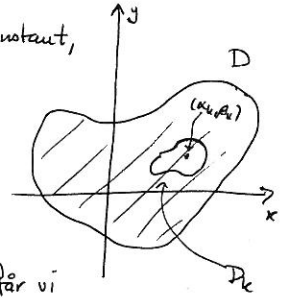
Ex: Plattan  $D$  har variabel ydensitet  $\rho(x,y)$  ( $\text{kg/m}^2$ ). (2)

Vad är den totala massan av  $D$ ?

Lösning: Om densiteten vore konstant, så skulle massan ges av

$$\text{massa} = \text{ydensitet} \cdot \text{area}$$

(kg)      ( $\text{kg/m}^2$ )      ( $\text{m}^2$ )



På en liten del  $D_k$  av plattan får vi

$\rho(x,y) \approx$  konstant  $\rho(x_k, y_k)$  för någon punkt  $(x_k, y_k)$  i  $D_k$ .

Vi får

$$\text{massan av } D_k \approx \rho(x_k, y_k) \mu(D_k)$$

$$\Rightarrow \text{total massa} \approx \sum_{D_k \in D} \rho(x_k, y_k) \mu(D_k)$$

Riemannsammor!

"Oändligt små" områden  $D_k$  ger oss

$$\boxed{\text{massan} = \iint_D \rho(x,y) dx dy}$$

(Man brukar beteckna massan av en "oändligt liten" bit med  $dm$ :  $m = \iint_D dm = \iint_D \rho(x,y) dx dy$ )

till en area i  $uv$ -planet då (4)

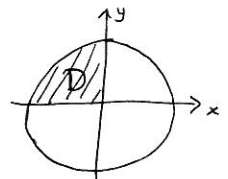
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Det verkar rimligt att vi för variabelbyten i dubbelintegraler för

Sats 7.8, s. 238, dvs. multipliera med determinanten vid variabelbyte!

Ex: Beräkna  $I = \iint_D x^2 y dx dy$ , där

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \leq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



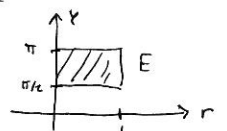
Lösning: Rita området  $D$ !

Eftersom det är en cirkelsektor provar vi att byta till

polära koordinater. Med  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$  svarar området

$D$  i  $xy$ -planet mot området  $E: \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$  i  $r\varphi$ -planet.

En rektangel! (Mycket lättare!)



Vi beräknar funktionaldeterminanten:

(5)

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Vi får nu

$$I = \iint_D x^2 y \, dx dy = \iint_E (r\cos\varphi)^2 \cdot r\sin\varphi \cdot \left| \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} \right| dr d\varphi =$$

$$= \iint_E r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \, dr d\varphi = \int_0^1 \left( \int_{\pi/2}^{\pi} r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \right) dr =$$

$$= \int_0^1 r^4 \cdot \left( \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \right) dr =$$

$$= \left( \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \right) \cdot \left( \int_0^1 r^4 \, dr \right) =$$

$$= \left[ -\frac{1}{3} \cos^3\varphi \right]_{\pi/2}^{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}. \quad D$$

därför följande föreläsningen!

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_1^2 \cdot \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\pi/2}^{2\pi} = \frac{1}{2} \left( \frac{16}{4} - \frac{1}{4} \right) \cdot (\pi + 0 - 0) =$$

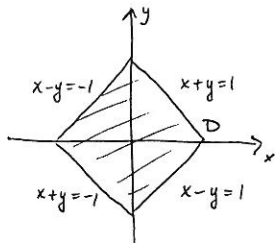
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} \cdot \pi = \frac{15\pi}{8}. \quad D$$

(7)

Ex: Beräkna  $I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} \, dx dy$ , där

$D$  är kvadraten med hörn i  $(1,0), (0,1), (-1,0)$  o  $(0,-1)$ .

Lösning: Vi ritar området!



Både integralen och området ger tips om att vi gör följande byte:

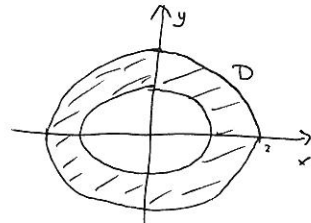
$$\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

Eftersom  $D$  kan skrivas  $\begin{cases} -1 \leq x+y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases}$  så får vi

$$E: \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases} \quad \text{En rektangel!}$$

Ex: Beräkna  $I = \iint_D x^2 \, dx dy$ ,  $D: 1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4$  (6)

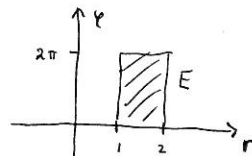
Lösning: Området  $D$  är en "ellipsring". Vi modifierar våra polära koordinater lite:



$$1 \leq x^2 + (2y)^2 \leq 2^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ 2y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{2}\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ger } E: 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

En rektangel!



$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{1}{2}r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} r \cos^2\varphi + \frac{1}{2} r \sin^2\varphi = \frac{1}{2} r.$$

$$\Rightarrow I = \iint_E (r\cos\varphi)^2 \cdot \frac{1}{2} r \, dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_1^2 r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \left[ \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right] = \frac{1}{2} \int_1^2 r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi =$$

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \iint_E \frac{u^2}{1+v^2} \, du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 \, du \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{1+v^2} \, dv =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} u^3 \right]_{-1}^1 \cdot \left[ \arctan v \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) (\arctan 1 - \arctan(-1)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}. \quad D$$

(8)