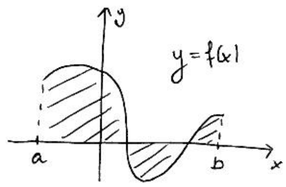
Föreläsning 13

1

Dubbelintegraler

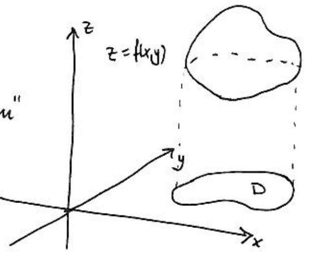
Funktion av en variabel:

$\int_a^b f(x)\,dx$ = area "med tecken"



Funktion av två variabler:

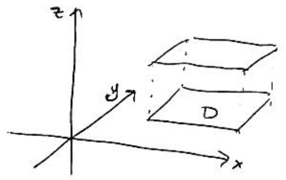
$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ = volym "med tecken"



Hur definierar man dubbelintegraler?

Antag för enkelhets skull att området D är en rektangel. Det enklaste fallet är $f(x,y) = C$, där C är en konstant. Vi ska då beräkna volymen av en "låda":

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = C \cdot \text{area}(D)$$

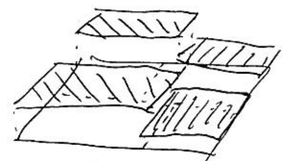


Näst enklast är då D kan delas in i mindre rektanglar, där $f(x,y)$ är konstant i varje mindre

2

rektangel:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$



summan av volymerna av "lådorna".

OBS! Om en låda ligger under xy-planet så ger den ett negativt bidrag till integralen. Funktionen ovan kallas trappfunktion.

Vi säger att en godtycklig funktion $f(x,y)$ är integrerbar på D ~~om~~ om volymen under $f(x,y)$ kan approximeras godtyckligt väl med volymer av trappfunktioner, eller mer strikt, om det finns trappfunktioner $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$ sådana att

$$\Phi(x,y) \le f(x,y) \le \Psi(x,y) \quad \text{i } D,$$

så att skillnaden

$$\iint_D \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint \Phi(x,y)\,dx\,dy$$

blir godtyckligt liten.

Då finns det ett entydigt tal λ med

$$\iint_D \Phi(x,y)\,dx\,dy \le \lambda \le \iint_D \Psi(x,y)\,dx\,dy$$

3

för alla Φ och Ψ.

Def $\lambda = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är integralen av f över D.

Anm: Det går att utvidga definitionen till att hantera fallet då D ej är en rektangel.

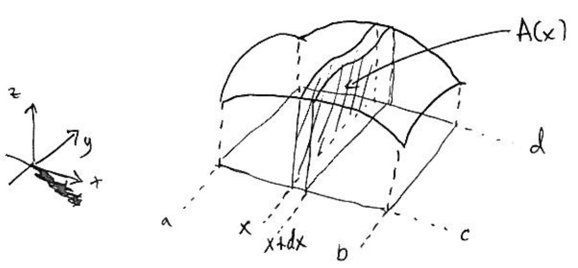
De (naturliga) räknelagarna för integraler på s.227 gäller.

Hur beräknar man en dubbelintegral (i fallet då D rektangel)?

Samma princip som i envariabelfallet:

Integral = "summa av ∞ många ∞ små bitar"

För att beräkna $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ skivar vi volymen i tunna skivor, parallella med yz-planet, med tjocklek dx:



4

Om dx är litet så är volymen av en skiva $dV = A(x)\,dx$. Summera nu dessa volymer:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b A(x)\,dx.$$

(För att få alla skivor låter vi x variera mellan a och b.)

För varje x-värde beräknas A(x) som en (enkel)integral i y-led: $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$. Vi får (Sats 7.3, s.229)

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx}$$

En dubbelintegral beräknas alltså genom att beräkna två enkelintegraler "efter varandra".

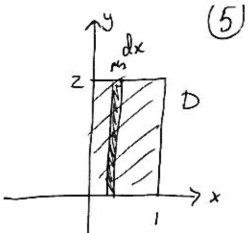
Motsvarande formel gäller om vi "skär" i omvänd ordning (dvs. i skivor parallella med xz-planet)

Ex: Beräkna

$$I = \iint_D x^3 y^2\,dx\,dy, \quad \text{där } D$$

ges av $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Lösning:



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^3 y^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^3 \cdot \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^1 \frac{8}{3} x^3 \, dx = \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3},$$

alternativt $I = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^3 y^2 \, dx \right) dy =$

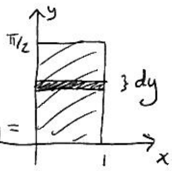
$$= \int_0^2 \left[\frac{x^4}{4} \cdot y^2 \right]_0^1 dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4} \, dy = \left[\frac{y^3}{12} \right]_0^2 = \frac{2}{3}. \quad \square$$

Ibland blir det en enklare primitiv på ett av hållen; då börjar man åt det hållet:

Ex Beräkna

$$I = \iint_D y \cos(xy) \, dxdy, \text{ där } D$$

ges av $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.



Lösning: $I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 y \cos(xy) \, dx \right) dy =$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin(xy) \right]_0^1 dy = \int_0^{\pi/2} (\sin y - \sin 0) \, dy = \left[-\cos y \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -0 - (-1) = \underline{\underline{1}}.$$

(Prova gärna att göra det åt andra hållet!)

Vi kan som vanligt "flytta ut" alla konstanter i en integral:

Ex: Beräkna $I = \iint_D xy e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy$, $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

Lösning: $I = \int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{-x^2} \cdot y e^{-y^2} \, dy \right) dx =$

betraktas som konstant då vi integrerar m.a.p. y

$$= \int_0^1 x e^{-x^2} \underbrace{\left(\int_0^1 y e^{-y^2} \, dy \right)}_{\text{konstant!}} dx =$$

$$= \left(\int_0^1 y \cdot e^{-y^2} \, dy \right) \cdot \left(\int_0^1 x e^{-x^2} \, dx \right) = I_1 \cdot I_2.$$

$$I_1 = I_2 = \int_0^1 x e^{-x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

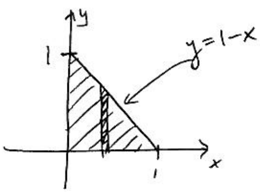
$$\Rightarrow \quad I = I_1 \cdot I_2 = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \right)^2}}$$

Integration över godtyckliga områden D:

Vi gör "som vanligt", men beskriver nu området med hjälp av integrationsgränserna, som nu inte alltid är konstanter.

Ex: Beräkna $I = \iint_D \frac{y}{1+x} \, dxdy$ då D är triangeln med hörn i (0,0), (0,1) och (1,0).

Lösning: Rita området!



Om vi först integrerar i y-led, så skall y variera mellan 0 och 1−x. Sedan låter vi x variera mellan 0 och 1. Vi får

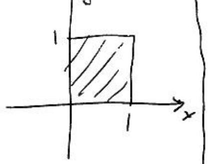
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{y}{1+x} \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2(1+x)} \, dx \overset{\text{pol.div}}{=} \int_0^1 \frac{1}{2} \left(x - 3 + \frac{4}{x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 3 + 4 \ln 2 - \ln 1 \right) = \underline{\underline{2 \ln 2 - \frac{5}{4}}}.$$

Alternativt kan vi beräkna $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \frac{y}{1+x} \, dx \right) dy$.

OBS! Ett par sätt att räkna fel är

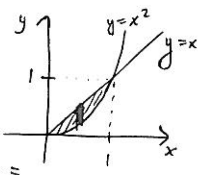


- $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x} \, dy \right) dx$ som ger integralen över hela kvadraten.
- $\int_0^{1-x} \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x} \, dx \right) dy$ som är meningslöst

då resultatet blir en funktion av x (ska bli ett tal!)

Ex: Beräkna $I = \iint_D xy \, dxdy$ om $D: x^2 \le y \le x$.

Lösning: Rita först D!



Integrerar vi först i y-led så får vi

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x^2}^x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^5) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{24}.$$

Om x-led först, så — OBS! Inversfunktion

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} xy \, dx \right) dy = \ldots\ldots$$