Föreläsning 12

Kurvor och ytor

- En *kurva* är värdemängden till en funktion (parametrisering)

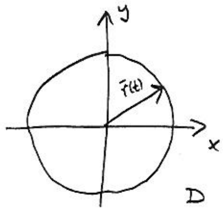
$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I \quad (I \text{ intervall})$$

Den är av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dvs. *vektorvärd*.

Ex: $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$ med

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

beskriver *enhetscirkeln*

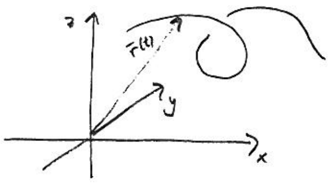


D

- En *kurva i* $\mathbb{R}^3$ är värdemängden till en funktion

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I.$$

Av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.



Ex: En linje i $\mathbb{R}^3$ är en kurva, t.ex.

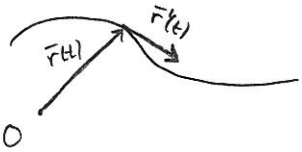
$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1, 2, -3) + t(1, 1, -3) =$$
$$= (1+t, 2+t, -3-3t). \quad D$$

Funktionerna $x(t), y(t), z(t)$ kallas *komponentfunktioner*

Eftersom $\bar{r}(t)$ beskriver läget så får vi, om vi ser t som tiden,

$$\bar{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

som hastigheten. Denna är en *tangentvektor* till kurvan:



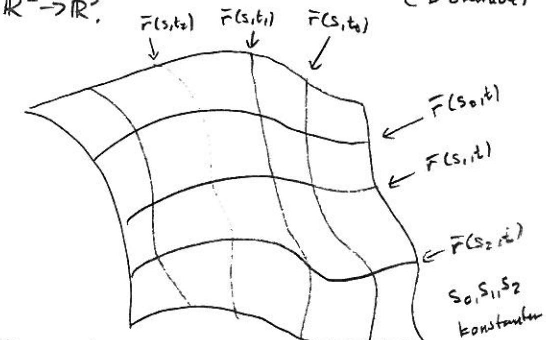
Fråga: Vad blir $\bar{r}'(t)$ för enhetscirkeln?

- En *yta i* $\mathbb{R}^3$ (på parameterform) är värdemängden till en funktion

$$\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), \quad (s,t) \in D.$$
$$(D \text{ område})$$

Av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

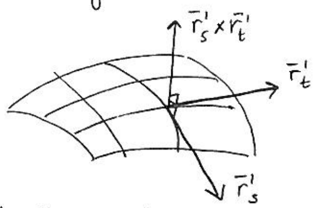
t_0, t_1, t_2 konstanter



s_0, s_1, s_2 konstanter

Vi kan tänka det som att s:et ger kurvor i en riktning och t:et i den andra!

Alltså blir $\bar{r}_s'$ en tangentvektor i en riktning och $\bar{r}_t'$ i en annan:



En normalvektor till ytan borde därför bli ortogonal mot både $\bar{r}_s'$ och $\bar{r}_t'$

$$\Rightarrow \quad \bar{n} = \bar{r}_s' \times \bar{r}_t' \quad \text{(vektorprodukt)}$$

är normalvektor.

Ex: $\bar{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ med

$$\begin{cases} x(s,t) = -1 + s + t \\ y(s,t) = - s + 2t \\ z(s,t) = s - t \end{cases}$$

är ett *plan* på parameterform (dvs en yta)

$$\bar{r}_s' = (1, -1, 1), \quad \bar{r}_t' = (1, 2, -1) \quad \Rightarrow$$

$$\bar{n} = \bar{r}_s' \times \bar{r}_t' = (1, -1, 1) \times (1, 2, -1) = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| =$$
$$= (-1, 2, 3).$$

Planet har alltså ekv. $\pi: \ -x + 2y + 3z + D = 0$.

Punkten $(-1, 0, 0)$ ligger i π. Insättning ger $D = -1$.

Planet har ekvation $-x + 2y + 3z - 1 = 0$

Alt. Ekv. $\ -(x - (-1)) + 2(y - 0) + 3(z - 0) = 0$.

punkten!

Funktionalmatriser och funktionaldeterminanter

- För en funktion $f(x_1, x_2)$ ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) "samlade" vi derivatorna i gradienten

$$(\text{grad} f)(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

ser det ut som en radmatris

- Hur samlar man derivatorna för en vektorvärd funktion, t.ex. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$-funktionen

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \text{som ges av} \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2 \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \end{cases} \ ?$$

Jo, i *funktionalmatrisen*

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Ex: För den linjära avbildningen

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2 \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

blir $\bar{f}'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, dvs. samma som systemmatrisen A i $Y = AX$ (A avbildningsmatrisen)

(5)

Enligt teorin i linjär algebra så anger determinanten av A "areaförändringen" då den linjära avbildningen tillämpas på ett objekt (i $\mathbb{R}^3$ "volymförändringen").

För att undersöka hur areor ($\mathbb{R}^2$) (volymer ($\mathbb{R}^3$)) förändras lokalt beräknar vi därför funktionaldeterminanten

$$\det \bar{F}'(\bar{x}) = \frac{d(y_1,y_2)}{d(x_1,x_2)} = \frac{d(f_1,f_2)}{d(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

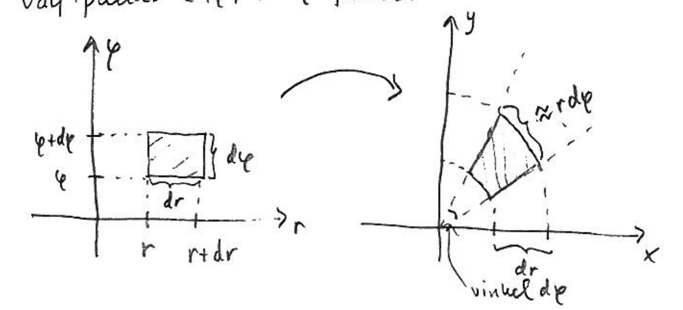
beteckningar

Ex: Byte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

är en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ från $r\varphi$-planet till xy-planet. Hur ser areaförändringen ut?

Välj punkt (r,φ) i $r\varphi$-planet:



(6)

Area, rektangel $= dr\,d\varphi$ Area, sektorring $\approx dr \cdot r d\varphi = r\,dr\,d\varphi$

Arean ändras med faktorn r då vi tillämpar polära koordinater!

Provar att beräkna funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\, r\cos\varphi - (-r\sin\varphi)\sin\varphi =$$

$$= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \quad \text{ok!}$$

- Principen fungerar lokalt, dvs. för små områden. Nära en punkt $\bar{a}$ så är differensen

$$\bar{f}(\bar{a}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{a}) \approx \text{en linjär avbildning:}$$

Taylorutveckling av $\bar{f} = (f_1, f_2)$:

$$\begin{cases} f_1(a+h,b+k) - f_1(a,b) = f'_{1x}(a,b)h + f'_{1y}(a,b)k + \text{restterm} \\ f_2(a+h,b+k) - f_2(a,b) = f'_{2x}(a,b)h + f'_{2y}(a,b)k + \text{restterm} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} f'_{1x}(a,b) & f'_{1y}(a,b) \\ f'_{2x}(a,b) & f'_{2y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

funktionalmatris $A = \bar{f}'(\bar{a})$

(7)

Systemet kan "nästan" skrivas

$$\begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{i matrisspråk.}$$

OBS! Lin.alg.: $\det A \neq 0 \iff$ systemet har entydig lösning $\iff A$ har invers

Detta betyder att $(\Delta x, \Delta y)$ kan lösas ut som funktion av $(\Delta f_1, \Delta f_2)$, dvs. den inversa funktionen existerar nära $\bar{a} = (a,b)$. Vi får inversa funktionssatsen (Sats 6.1, s.201) som alltså säger att $\bar{f}$ är lokalt bijektiv.

- Vi återvänder till kedjeregeln, denna gång för funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Funktionen
$$\begin{cases} s = f(u(x,y), v(x,y)) \\ t = g(u(x,y), v(x,y)) \end{cases}$$

går från "xy-planet" till "uv-planet" och vidare till "st-planet". Kedjeregeln ger

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x, \qquad f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y,$$

$$g'_x = g'_u \cdot u'_x + g'_v \cdot v'_x, \qquad g'_y = g'_u \cdot u'_y + g'_v \cdot v'_y$$

(8)

I matrisform blir detta

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \quad \text{kolla!}$$

Kedjeregeln kan alltså beskrivas som matrismultiplikation med funktionalmatriser!

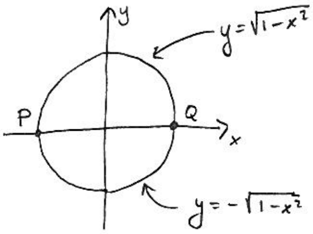
Vidare, från lin.alg vet vi att $\det AB = \det A \cdot \det B$.

För funk.determinanter av sammansatt funktion gäller alltså att

$$\frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \frac{d(f,g)}{d(u,v)} \cdot \frac{d(u,v)}{d(x,y)}.$$

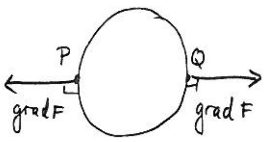
Genom $y=\sqrt{1-x^2}$ så ges y _explicit_ som en funktion av x. Samma funktion ges _implicit_ av

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$$



Om vi studerar $x^2+y^2=1$ (enhetscirkeln) så kan vi _lokalt_ lösa ut y som funktion av x _överallt utom_ i _punkterna_ P och Q. ⟵ Varför?

Om vi sätter $F(x,y)=x^2+y^2$, så är grad F vågrät i P och Q, dvs. $F'_y(P)=F'_y(Q)=0$.



Sats ("skiss") $F(x,y)=C$ nivåkurva och (a,b) punkt på denna. Om
$$F'_y(a,b)\neq 0$$
så kan y uttryckas som funktion av x, dvs. $y=y(x)$ i en omgivning av (a,b)

(För mer utförligt, se Sats 6.2, s.204. Implicita funktionssatsen)

Ex: Visa att ekvationen
$$F(x,y)=y^5+xy-4=0$$
definierar y som funktion av x nära punkten $P:(3,1)$. ← ligger på kurvan (kolla!)

Bestäm även $y'(x)$ nära P; speciellt $y'(3)$.

Lösning: Vi har $F'_y=5y^4+x$, och speciellt
$$F'_y(3,1)=5\cdot 1^4+3=8\neq 0 \Rightarrow y=y(x) \text{ nära } P!$$

Implicit derivering av $y(x)^5+xy(x)-4=0$ ger
$$5y(x)^4\cdot y'(x)+1\cdot y(x)+x\cdot y'(x)-0=0$$
$$\Leftrightarrow \quad y'(x)\left(5y(x)^4+x\right)+y(x)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad y'(x)=-\frac{y(x)}{5y(x)^4+x} \quad \text{eller} \quad y'=-\frac{y}{5y^4+x}.$$

I $(x,y)=(3,1)$ får vi $y'(3)=-\dfrac{1}{5\cdot 1^4+3}=-\dfrac{1}{8}$.

Anm: Vi kan _inte_ lösa ut $y(x)$, men däremot bestämma $y'(x)$ för $x=3$! Satsen ovan gäller även för fler variabler (se sid. 205-208).