Föreläsning 11 (1)

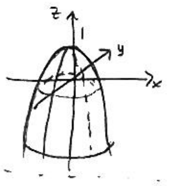
Optimering på icke-kompakta områden:

Nu finns inte garanterat största och minsta värde:

Ex: $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2$

har största värde $=1$, men saknar minsta värde.

$(f(x,y) \to -\infty$ då $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty)$



Ex: Bestäm ev. största och minsta värde av

$$f(x,y) = (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}, \quad D_f = \mathbb{R}^2.$$

Lösning: $e^{-(x^2+y^2)}$ borde göra så att $f(x,y) \to 0$ "långt borta". Vi ser också att $f(x,y)$ antar både positiva ($f(1,0)=e^{-1}$) och negativa ($f(-1,0)=-e^{-1}$) värden $\Rightarrow$ största o minsta värde borde finnas!

Stationära punkter: $\begin{cases} f'_x = e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2x) = 0 \\ f'_y = 2e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad (e^{-(x^2+y^2)} \neq 0)$

(2)

$\begin{cases} (x+2y)2x = 1 & ① \\ (x+2y)2y = 2 & ② \end{cases}$ $\Leftrightarrow x+2y = \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0)$ $\underset{①}{\overset{②}{\Rightarrow}} \frac{2y}{2x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$

Sätts in i ①: $(x+4x)2x = 1 \Leftrightarrow 10x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$,

och vi får punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ och $f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$.

"Långt borta": $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$

$f(x,y) = (r\cos\varphi + 2r\sin\varphi)e^{-r^2} = (\cos\varphi + 2\sin\varphi)re^{-r^2}$

$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y)| = \underbrace{|\cos\varphi + 2\sin\varphi|}_{\leq 3} re^{-r^2} \leq 3\frac{r}{e^{r^2}} \to 0$ då $r \to \infty$

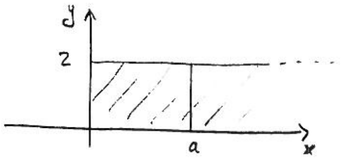
Alltså finns ett tal r_0 sådant att $|f(x,y)| < \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ då $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq r_0$. På den kompakta mängden $D_{r_0}: \sqrt{x^2+y^2} \leq r_0$ har $f(x,y)$ största/minsta värde, och dessa måste vara $\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ resp. $-\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$, vilket också måste gälla på hela $\mathbb{R}^2$.

Svar: $f_{max} = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$, $f_{min} = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$.

Ex: Bestäm ev. största o minsta värde till (3)

$$f(x,y) = x^2e^{-x-y} \quad i \; D_f: x \geq 0, 0 \leq y \leq 2.$$

Lösning: Studera först linjer $x=a$, $0 \leq y \leq 2$. Vi får



$g(y) = f(a,y) = a^2e^{-a-y} = \underbrace{a^2e^{-a}}_{\text{konstant}} \cdot e^{-y}$ som

är strängt avtagande (för varje a) $\Rightarrow$ störst då $y=0$, minst då $y=2$.

Eftersom $f(x,y) \geq 0$ och $f(0,y)=0$ så är minsta värde $\underline{0}$. Vi letar efter största värde:

$\underline{y=0}$: $h(x) = f(x,0) = x^2e^{-x}$, $x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ eller $x=2$

	0		2	
$h'(x)$	0	+	0	−
$h(x)$		↗	$4e^{-2}$	↘

Vi ser att $h(x)$ (och därmed $f(x,y)$) har största värde $4e^{-2}$.

Svar: $f_{max} = 4e^{-2}$, $f_{min} = 0$.

1

Optimering med bivillkor

Optimering som tidigare, men nu ska vi även ta hänsyn till bivillkor.

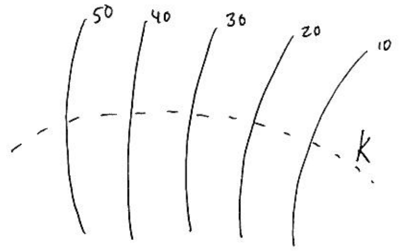
Ex: Bestäm största och minsta avstånd från kurvan $x^3+y^3=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, till origo, dvs. studera funktionen $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ i alla punkter som uppfyller $x^3+y^3=1, x\geq 0, y\geq 0$. (bivillkoret)

- Vi studerar först ett allmänt sådant problem

funktion $f(x,y)$ bivillkor $g(x,y)=C$

Bivillkoret definierar en kurva K i xy-planet. Låt oss rita några nivåkurvor till f:

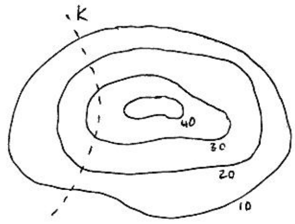
I)



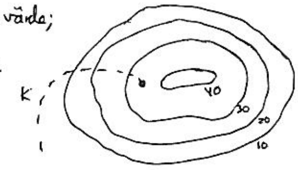
Här finns inget största värde då vi går högre och högre "uppför berget".

2

II) Här finns största värde, eftersom vi går "uppåt" och sedan "nedåt".



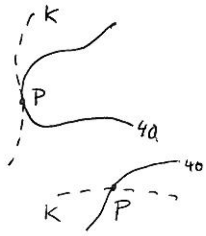
III) Här finns största värde; vi "stannar" på vägen upp.



Fall III visar att vi är intresserade av bivillkorets randpunkter, och vi måste även undersöka ev. randpunkter till D_f.

Vad händer i fall II ?

Om största värdet antas i P, så verkar det rimligt att K tangerar nivåkurvan till f i P, annars skulle det fortfarande "luta uppåt" och vi hade kunnat få ett större värde



Slutsats: normalen till $K: g(x,y)=C$ och normalen till $f(x,y)=C'$ är parallella! Detta kan vi uttrycka som att

$$\boxed{\text{grad } f \text{ och grad } g \text{ är parallella i } P.}$$

3

Att $\text{grad } f=(f'_x,f'_y) \,/\!/\, \text{grad } g=(g'_x,g'_y)$ innebär att

$$\begin{cases} f'_x=\lambda g'_x \\ f'_y=\lambda g'_y \end{cases} \quad (\text{om grad } g\neq \bar{0})$$

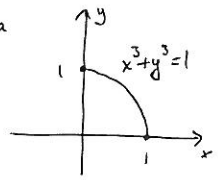
eller $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}=0$ (linjär algebra)

Lagranges multiplikatormetod

Ex (forts.): Optimera $f(x,y)=x^2+y^2$ (går lika bra!) då $g(x,y)=x^3+y^3=1$, $x\geq 0, y\geq 0$.

Lösning: Vi ska kolla randpunkterna $(1,0)$ och $(0,1)$: $f(1,0)=f(0,1)=\boxed{1}$, samt de punkter där

grad f // grad g.



Eftersom $\text{grad } f=(2x,2y)$ och $\text{grad } g=(3x^2,3y^2)$ får vi

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix}=0 \iff 6xy^2-6x^2y=0$$

Tillsammans med bivillkoret får vi

$$\begin{cases} 6xy^2-6x^2y=0 & (1) \\ x^3+y^3=1 & (2) \end{cases}$$

(1) $\iff xy^2=x^2y \iff y=x$ (vi kan anta att $x\neq 0, y\neq 0$)

4

$\Rightarrow$ (2) $\iff x^3+y^3=1 \iff 2x^3=1 \iff x=\frac{1}{2^{1/3}}=2^{-1/3}$,

och vi får $f(2^{-1/3},2^{-1/3})=(2^{-1/3})^2+(2^{-1/3})^2=$

$=2\cdot 2^{-2/3}=\boxed{2^{1/3}}$.

Jämförelse ger $f_{max}=2^{1/3}$

$f_{min}=1$

OBS! I ursprungsuppgiften skulle vi optimera $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ med samma bivillkor. Största avstånd är då $\sqrt{2^{1/3}}=\underline{\underline{2^{1/6}}}$ och minsta $\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$.

Anm: I exemplet var snittet av D_f och kurvan $g(x,y)=C$ kompakt så vi vet att största o minsta värde existerar.

Ex: Optimera

$$f(x,y)=x^2+x(y^2-1)$$

under bivillkoret $x^2+y^2=1$.

Lösning: Gjorde vi föreläsning 10 genom att parametrisera cirkeln $(x,y)=(\cos t,\sin t)$, $0\leq t\leq 2\pi$. Här fungerar alltså en annan (enklare) metod. D

- Samma metod fungerar för $f(x,y,z)$ och bivillkor $g(x,y,z)=C$:

3

Ex: Bestäm största värdet av

$$f(x,y,z) = x + y^2 + z$$

på enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$.

Lösning: Vi sätter $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Inga randpunkter finns! Vi kollar nu när $\text{grad} f \parallel \text{grad} g$, dvs.

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \\ f'_z = \lambda g'_z \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 2y = \lambda \cdot 2y & (2) \\ 1 = \lambda \cdot 2z & (3) \end{cases}$$

(Nu fungerar ej determinant)

$+$ bivillkoret $x^2+y^2+z^2=1$. (4)

(2) $\iff 2y - \lambda 2y = 0 \iff y(1-\lambda)=0$

$\iff$ eller $\begin{cases} y=0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$\underline{\lambda=1}$: (1) $\iff x = \frac{1}{2}$, (3) $\iff z = \frac{1}{2}$,

(4) $\iff y^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Två punkter: $\underline{\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)}$

$\underline{y=0}$: $\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 1 = \lambda \cdot 2z & (3) \\ x^2+z^2=1 & (4) \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow x = z$

6

(4) $\iff x^2+x^2=1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = z$

Punkterna $\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ o $\underline{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

Vi måste också kolla ev. "undantagspunkter" där

$\underline{\text{grad}\, g = \bar{0}} \iff (2x, 2y, 2z) = (0,0,0) \iff$

$(x,y,z) = (0,0,0)$. Eftersom denna ej ligger på $x^2+y^2+z^2=1$ så finns inga undantagspunkter.

Jämförelse: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = 3\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{-\sqrt{2}}$.

Svar: Största värdet är 3/2

- Om vi har mer än ett bivillkor så har vi ett liknande resultat (se sid. 178 i boken). Vi ersätter i detta fall "parallell" med "linjärt beroende":

Ex (uppg. 4.48): För vilka punkter på kurvan

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$$

är z-koordinaten störst o minst?

Lösning: Kurvan är skärningen mellan en sfär och ett plan $\Rightarrow$ kompakt mängd $\Rightarrow$

7

$\Rightarrow$ största o minsta värde finns. Vidare har varken kurvan eller D_f någon rand, så vi söker "inre punkter":

Vi vill optimera

$$f(x,y,z) = z,$$

med bivillkoren

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{och} \quad g_2(x,y,z) = x+2y+2z=0.$$

Kollar när $\text{grad} f, \text{grad}\, g_1, \text{grad}\, g_2$ är linjärt beroende:

$\text{grad} f = (0,0,1)$

$\text{grad}\, g_1 = (2x, 2y, 2z)$

$\text{grad}\, g_2 = (1,2,2)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 2y = 0 \iff y = 2x,$$

som skall gälla tillsammans med bivillkoren:

$$\begin{cases} x^2+(2x)^2+z^2=1 \\ x+2\cdot(2x)+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2+z^2=1 & (1) \\ 5x+2z=0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\iff z = -\frac{5}{2}x$ ger (1) $\iff 5x^2 + \frac{25}{4}x^2 = 1 \iff \frac{45}{4}x^2 = 1$

$\iff x = \pm\sqrt{\frac{4}{45}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{15}$

$\Rightarrow y = \pm\frac{4\sqrt{5}}{15}$ o $z = \mp\frac{5\sqrt{5}}{15}$.

8

Vi får punkterna $\frac{\sqrt{5}}{15}(-2,-4,5)$ $\underline{\text{störst}}$ z-koordinat och $\frac{\sqrt{5}}{15}(2,4,-5)$ $\underline{\text{minst}}$.