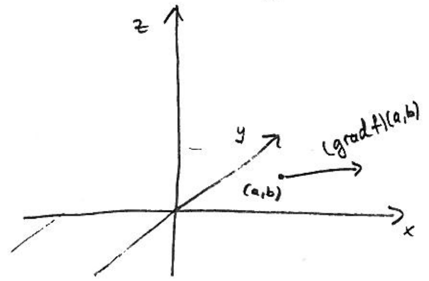
Föreläsning 7 (1)

Gradient

Partiella derivator ger oss information om hur en funktion uppför sig i riktningar parallella med koordinataxlarna. Betrakta nu en funktion $f(x,y)$ och punkten (a,b).
Vi bildar vektorn

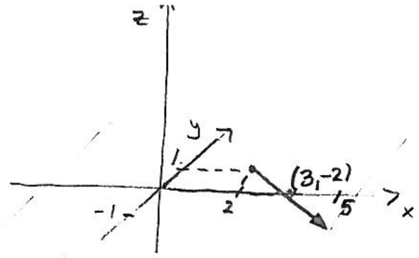
$$\boxed{(\mathrm{grad}\, f)(a,b) = \left(f'_x(a,b),\, f'_y(a,b)\right)}$$

som kallas gradienten av f i punkten (a,b).
(Vi "samlar" helt enkelt de partiella derivatorna i en vektor.) Denna är en vektor i planet, och vi kan rita ut denna i xy-planet.



Ex: För $f(x,y) = x^2y - xy^3$ får vi
$$\mathrm{grad}\, f = (f'_x, f'_y) = (2xy - y^3,\, x^2 - 3xy^2).$$
I t.ex. punkten $(2,1)$ blir därför
$$(\mathrm{grad}\, f)(2,1) = (2\cdot 2\cdot 1 - 1^3,\, 2^2 - 3\cdot 2\cdot 1^2) = (3,-2).$$

(2)



Vi har motsv. def. för funktioner av flera variabler, t.ex.

$$\mathrm{grad}\, f = (f'_x, f'_y, f'_z) \qquad (f \text{ av typ } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$$
vektor i $\mathbb{R}^3$

- Om $f(u,v)$ av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $\bar{g}(x) = (g_1(x), g_2(x))$ av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ så ger kedjeregeln (med $u = g_1(x)$ och $v = g_2(x)$) att

$$\frac{d}{dx} f(\bar{g}(x)) = \frac{d}{dx} f(g_1(x), g_2(x)) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx} =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \bullet \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right)$$
skalärprodukt!

Eftersom $\left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = (g_1'(x), g_2'(x)) = \bar{g}'(x)$ så gäller det alltså att

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(\bar{g}(x)) = (\mathrm{grad}\, f)(\bar{g}(x)) \bullet \bar{g}'(x)}$$

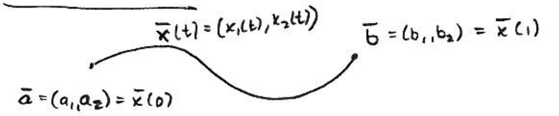
(3)

Denna liknar "envariabelkedjeregeln", så grad f har "samma roll" som f' i envariabelfallet.

> **Sats:** Om grad $f = (0,0)$ $(=\bar{0})$ i alla punkter i ett område D i $\mathbb{R}^2$ så är f konstant i D.

Anm: Läs exakta förutsättningar på f och D på sidan 114.
Motsv. sats gäller för f av n variabler.

Bevis ("skiss"):



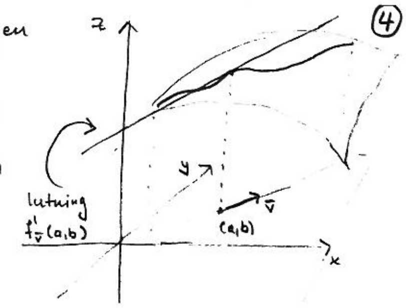
Enligt förutsättning finns det mellan två godtyckliga punkter $\bar{a}$ och $\bar{b}$ i D en kontinuerlig kurva
$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad 0 \le t \le 1.$$
$$f(\bar{x}(t)) = f(x_1(t), x_2(t)) \text{ är en funktion } \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
och vi har
$$\frac{d}{dt} f(\bar{x}(t)) = (\mathrm{grad}\, f)(\bar{x}(t)) \bullet \bar{x}'(t) = \bar{0} \bullet \bar{x}'(t) = 0$$
$\Rightarrow f(\bar{x}(t))$, $0 \le t \le 1$, är konstant enl. sats i endim.
Speciellt är $f(\bar{a}) = f(\bar{x}(0)) = f(\bar{x}(1)) = f(\bar{b})$. □

Riktningsderivata

Derivering i godtycklig riktning $\bar{v} = (v_1, v_2)$ ($i\ \mathbb{R}^2$-fallet)

(4)

Vi vill ta fram lutningen längs linjen
$$(x,y) = (a,b) + t(v_1, v_2)$$
Vi antar att $|\bar{v}| = 1$ och definierar riktningsderivatan $f'_{\bar{v}}(a,b)$ enligt



$$\boxed{f'_{\bar{v}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t}.}$$

Hur beräknar man $f'_{\bar{v}}$ i praktiken?

> **Sats:** Förutsatt att $|\bar{v}| = 1$, så är
> $$f'_{\bar{v}}(a,b) = (\mathrm{grad}\, f)(a,b) \bullet \bar{v}$$
> skalärprodukt

Bevis: Sätt $u(t) = f(a+tv_1, b+tv_2)$. $\quad (u: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$
Enligt ovan så ger kedjeregeln att
$$u'(t) = (\mathrm{grad}\, f)(a+tv_1, b+tv_2) \bullet (v_1, v_2),$$
eftersom de inre derivatorna är v_1 och v_2. Vidare gäller
$$f'_{\bar{v}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{u(t) - u(0)}{t} = u'(0) \qquad (\text{tänk!})$$
$$\Rightarrow f'_{\bar{v}}(a,b) = (\mathrm{grad}\, f)(a,b) \bullet (v_1, v_2)$$ □

Ex: $f(x,y) = x^2y + y^2$, $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ OBS! $|\bar{v}| = 1$ (5)

Beräkna $f'_{\bar{v}}(1,2)$!

Lösning: $\begin{cases} f'_x = 2xy \\ f'_y = x^2 + 2y \end{cases} \Rightarrow \text{grad} f = (2xy, x^2 + 2y)$

$\Rightarrow (\text{grad} f)(1,2) = (4,5)$. Vi får nu enligt satsen att

$f'_{\bar{v}}(1,2) = (\text{grad} f)(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = (4,5) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = \frac{3}{\sqrt{5}}$. □

Anm: Om t.ex. $\bar{v} = (1,0)$ så blir $f'_{\bar{v}} = (f'_x, f'_y) \cdot (1,0) = f'_x$.
De partiella derivatorna är specialfall av riktningsderivata.

I vilken riktning är $f'_{\bar{v}}$ störst?

$f'_{\bar{v}}(a,b) = (\text{grad} f)(a,b) \cdot \bar{v} = |(\text{grad} f)(a,b)||\bar{v}|\cos\theta$, där θ vinkeln mellan $(\text{grad} f)(a,b)$ och $\bar{v}$. Som störst då $\cos\theta = 1$
$\Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow (\text{grad} f)(a,b)$ och $\bar{v}$ är *lika riktade*!
Då får vi dessutom att

$$\underline{f'_{\bar{v}}(a,b)} = |(\text{grad} f)(a,b)| \overset{=1}{|\bar{v}|} = \underline{|(\text{grad} f)(a,b)|}$$

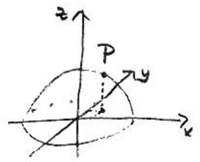
Sats: $(\text{grad} f)(a,b)$ pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast i (a,b). Den maximala tillväxthastigheten är $|(\text{grad} f)(a,b)|$.

Ex: I vilken riktning är "kullen"

$z = f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 \leq 9$,

brantast om vi står i punkten P med (x,y)-koord. $(1,2)$?

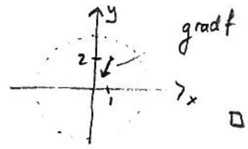
Lösning: $\text{grad} f = \left(-\frac{x}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}, -\frac{y}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}\right)$



ger $(\text{grad} f)(1,2) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$,

eller riktningen $(-1,2)$. I denna riktning är lutningen $\left|\left(-\frac{1}{2}, -1\right)\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. □

Anm: Riktningen är mot origo, vilket verkar rimligt!



□

Låt oss nu gå tillbaka och studera __nivåkurvor__

$$f(x,y) = C.$$

__Parametrisering__ $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ av nivåkurvan ger en funktion

$u(t) = f(x(t), y(t)) = C$. Derivering m.h.a. kedjeregeln ger

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0,$$

vilket också kan ses som att

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0, \text{ dvs, } (\text{grad} f) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Vektorerna $\text{grad} f$ och $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ är alltså ortogonala!
Eftersom $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ är __tangentvektor__ till kurvan så får vi

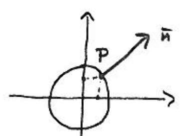
$(\text{grad} f)(a,b)$ är en __normalvektor__ till __nivåkurvan__ till f som går genom (a,b). (7)

Ex: För att studera normaler till enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$, så ser vi den som en nivåkurva till

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Vi har då $\text{grad} f = (2x, 2y)$, och i punkten $P: \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ får vi således normalen

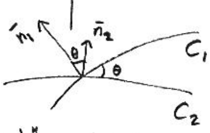
$$\bar{n} = (\text{grad} f)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\tfrac{2}{\sqrt{2}}, \tfrac{2}{\sqrt{2}}\right) = \underline{\underline{(\sqrt{2}, \sqrt{2})}}$$



Ex: Kurvorna

$C_1: \quad x^2 + xy + 3y^2 = 5$

$C_2: \quad x + y^2 = -1$



går båda genom $P: (-2,1)$ (kolla!). Bestäm vinkeln mellan kurvorna i P.

Lösning: Vinkeln mellan kurvorna = vinkeln mellan normalerna $\bar{n}_1$ & $\bar{n}_2$.

Sätt $\begin{cases} f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2 \\ g(x,y) = x + y^2 \end{cases}$. Vi får då

$$\begin{cases} \text{grad} f = (2x + y, x + 6y) \\ \text{grad} g = (1, 2y) \end{cases}$$

I $P: (-2,1)$ får vi $\bar{n}_1 = (-3,4)$ resp. $\bar{n}_2 = (1,2)$, och (8)

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = |\bar{n}_1||\bar{n}_2|\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} =$$

$$= \frac{(-3,4) \cdot (1,2)}{|(-3,4)||(1,2)|} = \frac{-3 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

__Svar:__ $\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$ $(\approx 63°)$ □

På motsvarande sätt är $\text{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ (i $\mathbb{R}^3$) normalvektor till motsvarande __nivåyta__.

Ex: Bestäm en ekvation för tangentplanet π till ellipsoiden

$$E: \quad x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 3 \quad \text{i } P: (1,2,3).$$

Lösning: E är nivåyta till funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}.$$

$\text{grad} f = \left(2x, \frac{1}{2}y, \frac{2}{9}z\right) \Rightarrow (\text{grad} f)(1,2,3) = \frac{1}{3}(6,3,2)$.

Alltså är $(6,3,2)$ en normalvektor till E i P
$\Rightarrow$ normalvektor till π! Tangentplanet π har därför ekv

$$6x + 3y + 2z + D = 0.$$

Punkten P ligger i π $\Rightarrow 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + D = 0$
$\Leftrightarrow D = -18$. __Svar:__ $6x + 3y + 2z - 18 = 0$

Nytt sätt att bestämma tangentplan!