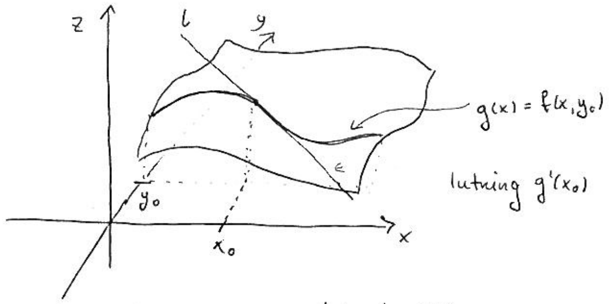
Föreläsning 5 ①

Partiella derivator

Betrakta funktionsytan till en funktion $f(x,y)$ (av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) och skär denna med planet $y = y_0$.



Vi får då en funktionskurva för funktionen

$$g(x) = f(x, y_0)$$

i en variabel (i x). Nu kan vi precis som tidigare i envariabelanalysen beräkna lutningen av varje tangent l längs denna kurva. I punkten (x_0, y_0) får vi lutningen $g'(x_0)$. Denna lutning kallas den partiella derivatan av f i (x_0, y_0) med avseende på variabeln x, och betecknas

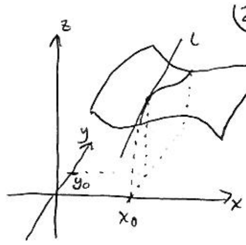
$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Definition:
$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

②

På motsvarande sätt inför vi den partiella derivatan med avseende på y. Beteckning

$$f'_y(x_0, y_0) \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$



Vi kan på motsv. sätt definiera partiella derivator för funktioner m.a.p. tre eller fler variabler (se läroboken).

Hur beräknar man partiella derivator?

Metod:
- (Derivata m.a.p. x) Betrakta alla y som konstanter och derivera som vanligt.
- (Derivata m.a.p. y) Betrakta alla x som konstanter!

Ex: Beräkna f'_x & f'_y för $f(x,y) = x^3 y^2$.

Lösning: För f'_x så betraktar vi y^2 som en konstant (den bara "följer med")

$$f'_x = 3x^2y^2.$$

På samma sätt för vi

$$f'_y = 2x^3y$$

③

Vanliga deriveringsregler gäller:

Ex: För $f(x,y) = y e^{xy}$ får vi

$$f'_x = y \cdot e^{xy} \cdot y = y^2 e^{xy} \quad \text{(kedjeregeln, inre derivata)}$$

$$f'_y = 1 \cdot e^{xy} + y\, e^{xy} \cdot x = (1 + xy)e^{xy} \quad \text{(prodregeln + kedjeregeln)}$$ □

Ibland behöver vi hitta primitiver "partiellt", och då är det viktigt att tänka på följande:

Envariabelfallet: $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C$ (konstant)

Flervariabelfallet: $f'_x(x,y) = 0 \Rightarrow f(x,y) = \varphi(y)$,

där φ godtycklig funktion i en variabel, eftersom allt som innehåller y ses som konstant då vi beräknar f'_x!

Ex: Finns $f(x,y)$ sådan att $\begin{cases} f'_x = 3x^2y + y^2 & ① \\ f'_y = x^3 + 2xy + 3y^2 & ② \end{cases}$?

Lösning: ① ger $f(x,y) = x^3y + xy^2 + \varphi(y)$.

Derivering av denna m.a.p. y ger $f'_y = x^3 + 2xy + \varphi'(y)$, vilket skall jämföras med ②

$\Rightarrow$ stämmer med $\varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = y^3 + C$.

Svar: Ja, $f(x,y) = x^3y + xy^2 + y^3 + C$ (kolla!).

④

Ex: Finns $f(x,y)$ sådan att $\begin{cases} f'_x = x + x^2y & ① \\ f'_y = \frac{1}{3}x^3 + xy & ② \end{cases}$?

Lösning: ① ger $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3y + \varphi(y)$.

Derivering m.a.p. y ger $f'_y = 0 + \frac{1}{3}x^3 + \varphi'(y)$.

Jämför med ②: Vi får $\varphi'(y) = xy$, vilket ej fungerar då xy både beror av x och y!

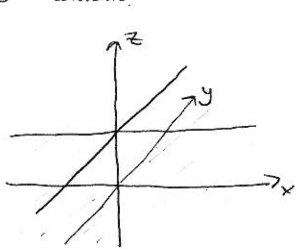
Svar: Nej! □

I en variabel gäller f deriverbar $\Rightarrow f$ kontinuerlig. Detta gäller inte nu:

Ex: Betrakta
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x = 0 \text{ eller } y = 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi får grafen $z = f(x,y)$ till höger. Funktionen är partiellt deriverbar i origo med

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0,$$



men ej kontinuerlig där (tänk!)

Vi inför därför begreppet differentierbarhet:

(5)

I en variabel har vi

$f(x)$ deriverbar i $x=a$ med derivata A

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A \Leftrightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A + \rho(h)$$

där $\lim\limits_{h\to 0} \rho(h) = 0$. En omskrivning ger

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \rho(h)\cdot h, \quad \text{där } \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0.$$

Generaliserar vi detta till flera variabler, t.ex. två, så får vi

$$\boxed{f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \rho(h,k)\cdot\sqrt{h^2+k^2}, \quad \text{där } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = 0.} \qquad (*)$$

Funktionen $f(x,y)$ sägs vara differentierbar i (a,b) om det finns tal A och B och en funktion $\rho(h,k)$ som uppfyller $(*)$. (Se även sidan 107 för diff.barhet av funktion av tre variabler.)

Man kan visa att en differentierbar funktion är

- kontinuerlig (Sats 4.2)
- partiellt deriverbar, dvs. alla partiella derivator existerar. Dessutom är $A = f'_x(a,b)$, $B = f'_y(a,b)$. (Sats 4.1)

(6)

Ex: Avgör om

$$f(x,y) = xy$$

är differentierbar i punkten $(1,-1)$.

$$f(1+h, -1+k) - f(1,-1) = (1+h)(-1+k) - 1\cdot(-1) =$$

$$= -1 - h + k + hk + 1 = \underbrace{(-1)}_{A}\cdot h + \underbrace{1}_{B}\cdot k + hk$$

Det gäller att $hk = \underbrace{\dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{=\rho(h,k)} \cdot \sqrt{h^2+k^2}$,

och räcker att visa att $\rho(h,k) = \dfrac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$

Polära koord:

$$0 \le |\rho(h,k)| = \left|\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\right| = r\underbrace{|\cos\varphi|}_{\le 1}\underbrace{|\sin\varphi|}_{\le 1} \le r \to 0$$

då $r \to 0$,

och vi är klara.

Svar: Ja, den är diff.bar i $(1,-1)$ och

$f'_x(1,-1) = A = -1$, $f'_y(1,-1) = B = 1$. D

Som synes är det jobbigt att visa differentierbarhet, så i praktiken använder man följande sats.

(7)

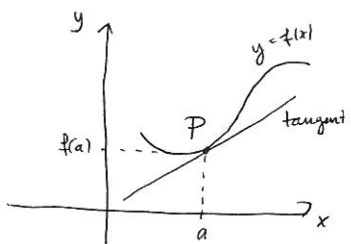
> **Sats (4.3, s. 106)**: Antag att f'_x & f'_y är definierade i en omgivning av (a,b). Då gäller
>
> f'_x, f'_y kontinuerliga i (a,b) $\Rightarrow$ f är differentierbar i (a,b)

I princip så blir alla "vanliga" elementära funktioner differentierbara.

Tangentplan

Repetition (envariabelanalys).

Tangenten i punkten P har ekvationen



$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

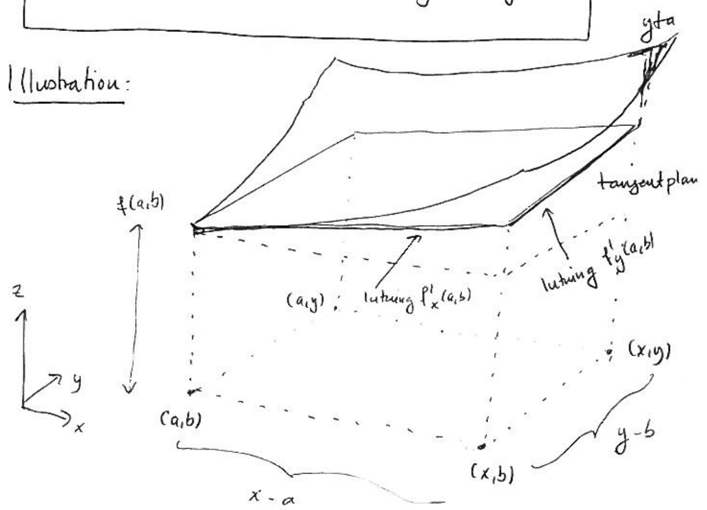
(eller $y - f(a) = f'(a)(x-a)$).

För funktionsytan $z = f(x,y)$ blir motsvarigheten till tangent ett helt plan som "tangerar" (tänk!). Derivatorna f'_x & f'_y anger lutningen i x-led resp. y-led, så tangentplanet i punkten $(a,b,f(a,b))$ får ekvationen

(8)

$$\boxed{z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}$$

Illustration:



Ex: Bestäm en ekvation för tangentplanet till

$$z = f(x,y) = x^2 + xy$$

i punkten $P: (1,2,3)$.

Lösning: Kolla först att punkten ligger på ytan: $3 = 1^2 + 1\cdot 2$ OK!

Vi får $\begin{cases} f'_x = 2x+y \\ f'_y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2) = 4 \\ f'_y(1,2) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ekv blir $z = 3 + 4(x-1) + 1\cdot(y-2)$

$\Leftrightarrow$ $4x + y - z - 3 = 0$ (ekv för plan!)

D