

Föreläsning 4

(1)

Sammansättning av funktioner

Ex: Betrakta

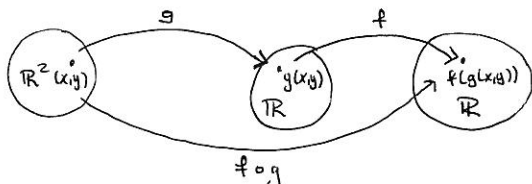
$$f(u) = e^u \quad \text{av typen } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x,y) = x^2 + y \quad \text{av typen } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

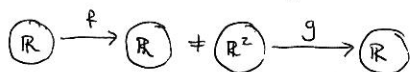
Vi kan då bilda sammansättningen $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x^2 + y) = e^{x^2 + y}$$

Funktionen $f \circ g$ blir av typen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:



Vi kan däremot inte bilda $g \circ f$:



Ex: Studera

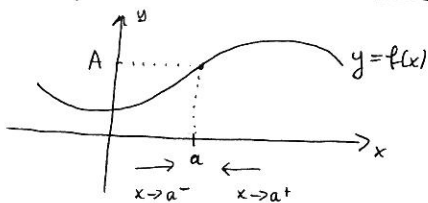
$$f(u,v) = u \sin v + e^u \quad \text{av typen } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x,y) = (xy, x^2 + y^2) \quad \text{av typen } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Gränsvärden:

(3)

I endim: Att $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ betyder att vi kan få $f(x)$ godtyckligt nära A bara x är tillräckligt nära a :

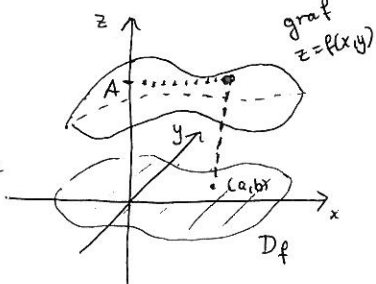


I envariabel fallet är det relativt "enkelt" att beräkna gränsvärden. Vi kan då bara närma oss punkten a från två håll: $x \rightarrow a^+$ och $x \rightarrow a^-$.

I flerdim: Vi koncentrerar oss på fallet då $f(x,y)$ är en funktion av typen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A$$

Här betyder att $f(x,y)$ kan komma godtyckligt nära A bara (x,y) är tillräckligt nära punkten (a,b) .

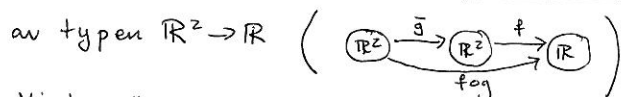


Se exakt definition på s. 81.

Vi får

(2)

$$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(xy, x^2 + y^2) = xy \sin(x^2 + y^2) + e^{xy}$$



Vi kan även här inte bilda $g \circ f$:

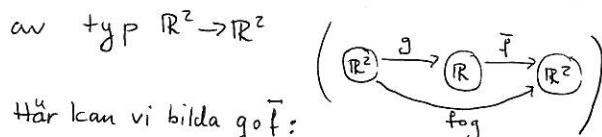
Ex: Studera

$$\bar{f}(u) = (u^2, \sqrt{u}) \quad \text{av typ } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x,y) = \cos(x+y) \quad \text{av typ } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Vi får

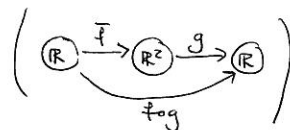
$$(\bar{f} \circ g)(x,y) = \bar{f}(g(x,y)) = \bar{f}(\cos(x+y)) = (\cos^2(x+y), \sqrt{\cos(x+y)})$$



Här kan vi bilda $g \circ \bar{f}$:

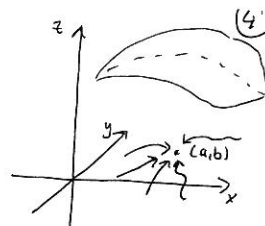
$$(g \circ \bar{f})(u) = g(\bar{f}(u)) = g(u^2, \sqrt{u}) = \cos(u^2 + \sqrt{u})$$

av typ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Problem! I detta fall måste vi studera oändligt många sätt att nämna oss (a,b) i xy -planet.

Detta problem hanterar vi genom att byta till polära koordinater:



Ex: Beräkna $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, om

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Vi byter till polära koordinater $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$.
 Att $(x,y) \rightarrow (0,0)$ är då samma sak som att $r \rightarrow 0$ (tänk efter!).

$$\begin{aligned} \text{Vi får } f(x,y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi (r \sin \varphi)^2}{r^2} = \\ &= r \cos \varphi \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

För att vårt resultat inte ska bero av vinkel φ , dvs. den väg vi tar in mot $(0,0)$, så uppskattar vi (absolutbeloppet av) $f(x,y)$ uppåt:

$$0 \leq |f(x,y)| = r |\cos \varphi \sin^2 \varphi| \leq r \cdot 1 \cdot 1^2 = r \rightarrow 0 \quad \text{då } r \rightarrow 0$$

Det följer nu av instängning att $|f(x,y)| \rightarrow 0$, och därmed även att $f(x,y) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow 0$,

dvs. då $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Detta gäller oberoende av φ ,
vägen in mot origo, så

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \underline{0}. \quad \square$$

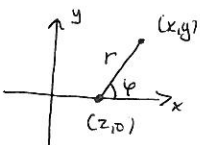
Hur gör man om $(x,y) \rightarrow (a,b) \neq (0,0)$?

- Vi modifierar det polära bytet.

Ex: Beräkna

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy - 2y}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}}$$

Vi byter till $\begin{cases} x = 2 + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$. Vi får



Detta ger

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{xy - 2y}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}} = \frac{(x-2)y}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}} = \\ &= \frac{(2+r \cos \varphi - 2)r \sin \varphi}{\sqrt{(r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}} = r \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$

Vi får $0 \leq |f(x,y)| = r |\cos \varphi \sin \varphi| \leq r \cdot 1 \cdot 1 = r \rightarrow 0$ där $r \rightarrow 0$

Alltså gäller det att $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} f(x,y) = \underline{0}$. \square

Vi studerar nu gränsvärden då $|(x,y)| \rightarrow \infty$,
dvs. då $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

Ex: Beräkna

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} (x-2y)e^{-(x^2+y^2)}$$

Sätter vi $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ får vi

$$f(x,y) = (r \cos \varphi - 2r \sin \varphi) e^{-r^2}, \text{ och}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y)| &= |r(\cos \varphi - 2 \sin \varphi) e^{-r^2}| = \\ &= r e^{-r^2} |\cos \varphi - 2 \sin \varphi| \leq 3 \left(\frac{r}{e^{r^2}}\right) \rightarrow 0 \text{ där } r \rightarrow \infty \\ & \quad \text{*) } \leq |\cos \varphi| + |-2 \sin \varphi| \leq 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

Det följer att $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x,y) = \underline{0}$.

(*) enligt triangelolikheten $|a+b| \leq |a| + |b|$ \square

Kontinuerliga funktioner

Def: En funktion $f(x,y)$ av typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sägs vara kontinuerlig i (a,b) om $f(x,y) \rightarrow f(a,b)$ då $(x,y) \rightarrow (a,b)$

Hur gör man om man skall visa att

$$f(x,y) \rightarrow A \neq 0 \text{ då } (x,y) \rightarrow (a,b)?$$

- "Geissa" vad A bör bli, och försök visa att $|f(x,y) - A| \rightarrow 0$.

Det kan hända att gränsvärde saknas:

Ex: Beräkna

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} !$$

Sätt $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$. Vi får

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2r \cos \varphi r \sin \varphi}{r^2} = 2 \cos \varphi \sin \varphi = \sin 2\varphi \quad (\frac{1}{2})$$

Här är t.ex. $f(x,y) = \sin 2\varphi = \begin{cases} 0 & \text{om } \varphi = 0 \\ 1 & \text{om } \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$, oavsett

hur litet r är, dvs. hur nära origo vi är.

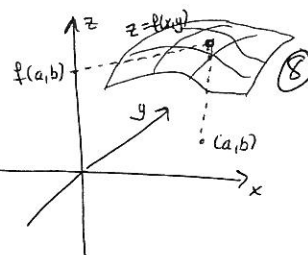
Gränsvärdet kan då ej existera! (Notera att $\varphi = 0$ motsvarar vägen $y=0$, och att $\varphi = \frac{\pi}{4}$ svarar mot vägen $y=x$.)

Kolla grafen på sidan 86!

Försök även att förtä Exempel 3.26 på sid. 86.

Geometrisk tolkning:

En kontinuerlig funktion har en sammanhängande graf utan plöteliga "spräng".



Alla uttryck i elementära funktioner visar sig vara kontinuerliga (där de är "ofarliga", t.ex. nämnare $\neq 0$).

Exempelvis är

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2) \cos(xy-3) e^{xy}}{x^2+1}$$

kontinuerlig i hela \mathbb{R}^2 .

Jämför satsen om kontinuerliga funktioner, s. 91-92, med euklidiska rummet. Kolla att de verkar rimliga!

Gränsvärden för funktioner av typ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$:

Ex: $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ av typ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Det gäller att

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \vec{f}(x,y) = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) =$$

$$= \underline{(0,0)}$$

Övning!

\square