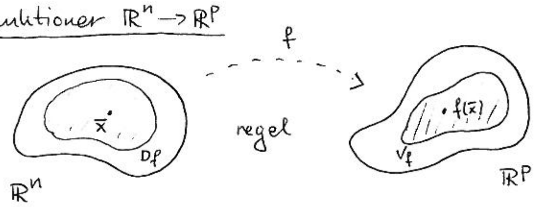
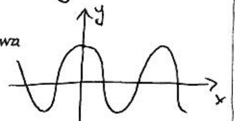
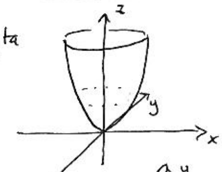
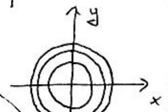
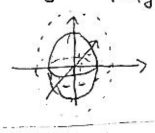
Föreläsning 3

1

Funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$



Förra gången reellvärda funktioner ($p=1$):

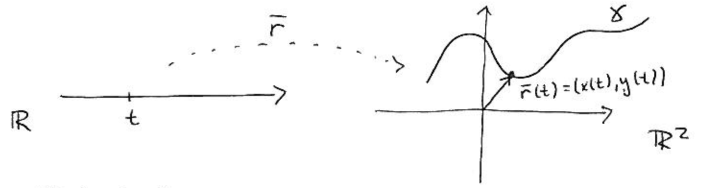
Typ	Exempel	Geometrisk tolkning
$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$	$f(x)=\cos x$	graf/funktionskurva $y=f(x)$ 
$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$	$f(x,y)=x^2+y^2$	graf/funktionsyta $z=f(x,y)$  eller nivåkurvor $f(x,y)=C$ 
$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$	$f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}$	nivåytor $f(x,y,z)=C$ "skal" 
$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$	$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$	??

2

Denna gång vektorvärda funktioner ($p\geq 2$):

Funktioner av typen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.

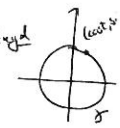
En funktion $\bar r$ av typen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ avbildar tal t ($\mathbb{R}$) på punkter/vektorer $\bar r(t)=(x(t),y(t))$ i planet ($\mathbb{R}^2$):



Värdemängden blir då en kurva γ, och vi säger att $\bar r$ är en parametrisering av kurvan. Ett exempel är

$$\bar r(t)=(\cos t,\sin t),\qquad 0\le t\le 2\pi$$

komponentfunktioner   definitionsmängd



som parametriserar enhetscirkeln.

Anm: Kurvor kan parametriseras på flera olika sätt, exempelvis är även

$$\bar r_1(t)=(\cos 2t,\sin 2t),\qquad 0\le t\le\pi,$$

en parametrisering av enhetscirkeln.

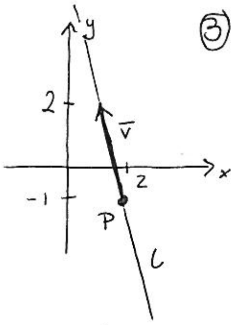
Ex: Linjen l i planet som går genom punkten $P:(2,-1)$ och har riktningsvektor $\bar v=(-1,3)$ ges av

$$\begin{cases}x=2-t\\ y=-1+3t\end{cases},\qquad t\in\mathbb{R}$$

3

En parametrisering av l ges alltså av

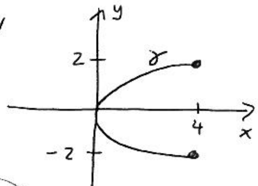
$$\bar r(t)=(2-t,-1+3t),\quad t\in\mathbb{R}.$$



Ex: Funktionen

$$\bar r(t)=(t^2,t),\quad -2\le t\le 2,$$

parametriserar en "vriden" (del av en) parabel:



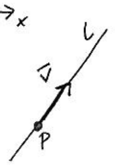
Funktioner av typen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

Värdemängden γ till en funktion $\bar r$ av typen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ blir en kurva i rummet:

Ex: Funktionen

$$\bar r(t)=(2+2t,-t,-1+t),\quad t\in\mathbb{R},$$

av typen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ är en parametrisering av linjen l i rummet som går genom (t.ex.) punkten $P:(2,0,-1)$ och har riktn.vektor $\bar v=(2,-1,1)$.

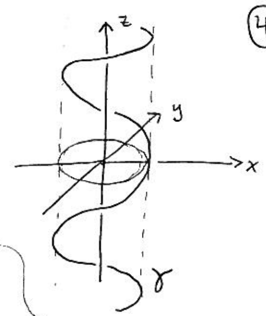


4

Ex. Funktionen

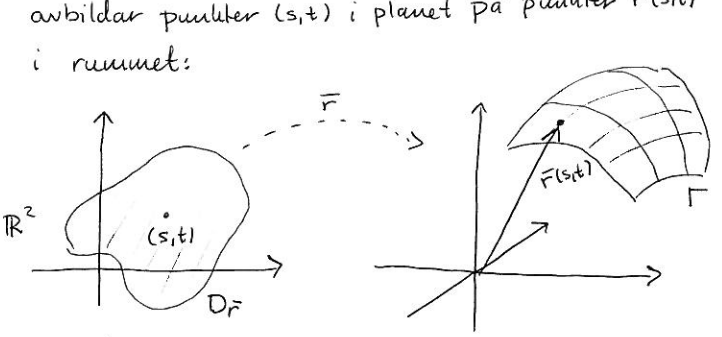
$$\bar r(t)=(\cos t,\sin t,t),\quad t\in\mathbb{R}$$

beskriver en spiral kring z-axeln



Funktioner av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

En funktion $\bar r$ av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ avbildar punkter (s,t) i planet på punkter $\bar r(s,t)$ i rummet:



Värdemängden blir en yta Γ. Vi säger att $\bar r$ är en parametrisering av Γ. En funktion $\bar r$ av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ kan uttryckas

$$\bar r(s,t)=(x(s,t),y(s,t),z(s,t)).$$

Observera att komponentfunktionerna nu är funktioner av typen $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Varför en yta?

Om vi fixerar t.ex. $s = s_0$, så blir

$$\bar{g}(t) = \bar{r}(s_0, t)$$

en funktion av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, och ger en kurva i rummet.

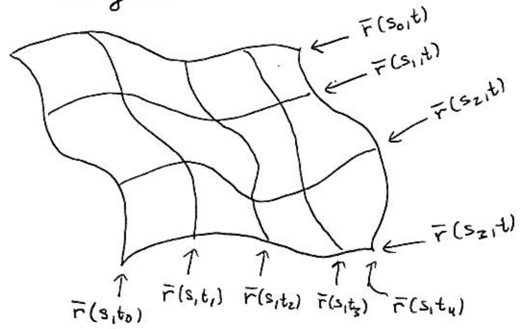
På motsv. sätt får vi om vi fixerar $t = t_0$:

$$\bar{h}(s) = \bar{r}(s, t_0),$$

och även denna svarar mot en kurva.

Genom att fixera olika s och t så får vi ett "rutnät" av kurvor – en yta!

s_i, t_i konstanter

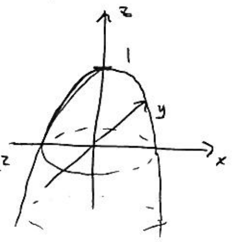


Ex: En parametrisering av den "upp-o-nervända" paraboloiden

$$z = 1 - (x^2 + y^2)$$

ges (t.ex.) av

$$\bar{r}(s,t) = (s, t, 1 - (s^2 + t^2)), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$$



Ex: Planet π som går genom punkterna $P: (1,2,0)$, $Q: (-2,-1,1)$ och $R: (1,3,1)$ har (t.ex.) riktn.-vektorerna

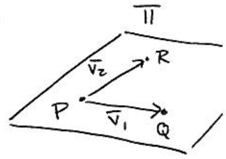
$$\bar{v}_1 = \overline{PQ} = (-2,-1,1) - (1,2,0) = (-3,-3,1)$$

$$\bar{v}_2 = \overline{PR} = (1,3,1) - (1,2,0) = (0,1,1)$$

(icke-parallella). Således kan planet beskrivas

$$\begin{cases} x = 1 - 3s \\ y = 2 - 3s + t \\ z = + s + t \end{cases}$$

$\uparrow$ punkten P, $\uparrow \bar{v}_1$, $\uparrow \bar{v}_2$



Med andra ord har planet parametriseringen

$$\bar{r}(s,t) = (1 - 3s, 2 - 3s + t, s + t), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

$\square$

Ex: Sfären med radie 2 och medelpunkt origo kan i rymdpolära koordinater uttryckas

$$\begin{cases} x = 2 \sin\theta \cos\varphi \\ y = 2 \sin\theta \sin\varphi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

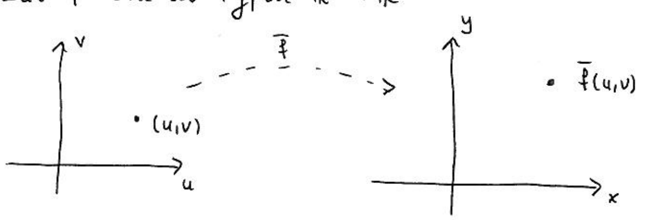
(Repetera från förra föreläsningen!). Således blir en parametrisering

$$\bar{r}(\theta, \varphi) = (2\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta), \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

$\square$

Funktioner av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Låt $\bar{f}$ vara av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Ett sätt att tolka $\bar{f}$ är som ett koordinatbyte i planet:

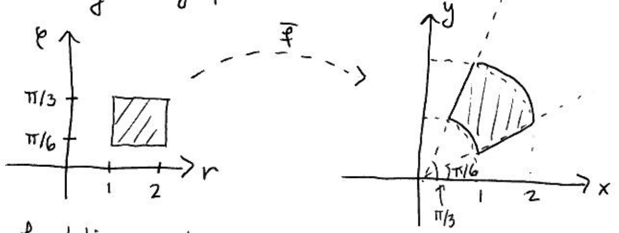
Ex: Det polära koordinatsambandet

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

kan ses som en funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\bar{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Med t.ex. definitionsmängden $1 \le r \le 2$, $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, så avbildar $\bar{f}$ en rektangel i $r\varphi$-planet på en sektorring i xy-planet:



En funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) kallas även en transformation.

Ex: Ett rymdpolärt koordinatbyte

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

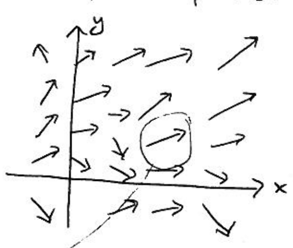
kan tolkas som en funktion av typen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, från $r\theta\varphi$-rummet till xyz-rummet:

$$\bar{f}(r, \theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

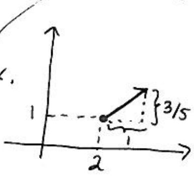
Alternativ tolkning ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) – vektorfält!

$\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

vektorfält i planet



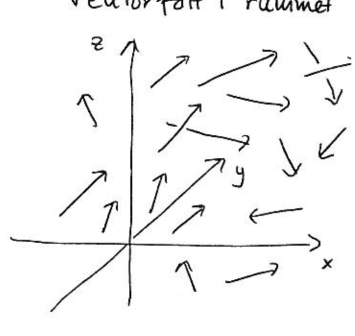
t.ex.



$$\bar{f}(2,1) = (1, \tfrac{3}{5})$$

$\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

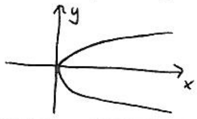
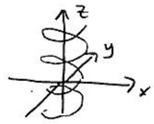
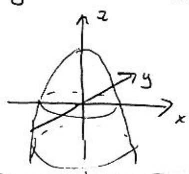
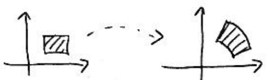
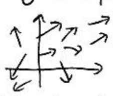
vektorfält i rummet



Exempelvis kan dessa motsvara

- kraftfält
- vätska som strömmar
- elektriskt fält
- vindfält

Sammanfattning vektorvärda funktioner:

Typ	Exempel	Geometrisk tolkning
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	$\bar{r}(t) = (t^2, t)$	kurva i planet 
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	$\bar{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$	kurva i rummet 
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$\bar{r}(s,t) = (s, t, 1-(s^2+t^2))$	yta i rummet 
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	$\bar{f}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$	 koordinatbyte i planet **eller**  vektorfält i planet
$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\bar{f}(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$	koordinatbyte i $\mathbb{R}^3$ **eller** vektorfält i $\mathbb{R}^3$