

Föreläsning 22

(1)

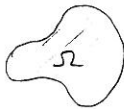
Förra föreläsningen såg vi att

$$(P, Q) \text{ potentialfält} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

men att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow (P, Q) \text{ potentialfält.}$$

Onvändningen gäller dock med en extra förutsättning på definitionsmängden Ω .



Vi visar först följande delresultat:

Sats:

Ω böjvis sammanhängande
 (P, Q) vektorfält på Ω
 Om $\int_{\gamma} P dx + Q dy$ är oberoende av vägen,
 så är (P, Q) ett potentialfält på Ω .



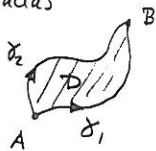
Bevis ("sluss"): Vi ska konstruera en potentialfunktion U till (P, Q) . Vi gör det på följande sätt:

$$U(x, y) = \int_{\gamma} P(s, t) ds + Q(s, t) dt,$$

Bevis ("sluss"): Greens formel kan användas

(3)

$$\int_{\partial_1} - \int_{\partial_2} = \iint_D 0 \, dx dy = 0$$



$$\Rightarrow \int_{\partial_1} = \int_{\partial_2}, \text{ dvs.}$$

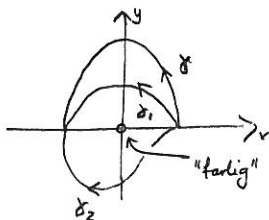
integral oberoende av väg $\Rightarrow (P, Q)$ potentialfält. \square

Tänk nu efter vartör vi inte kan byta ut ellipsbiten i exemplet från förra föreläsningen mot t.ex. udden halvan av enhetscirkeln!

Hur stort hade felet i svaret blivit?

$$\int_{\gamma} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

∂_1 funkar!



∂_2 funkar ej!

Området ej enkelt sammanhängande, "hål" i ögga. Felet blir här 2π (jmf. exempel förra förel.).

där γ går från den fixa punkten (a, b) till den variable punkten (x, y) .

(2)

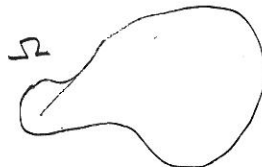
(därför analysens huvudsak: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$) \square

Vi såg förra föreläsningen ett exempel

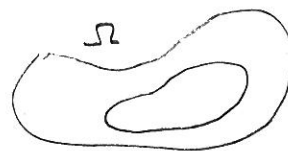
där $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, men vi ej hade ett potentialfält.

I det exemplet var definitionsområdet Ω ej enkelt sammanhängande.

Enkelt sammanhängande \approx sammanhängande "utan hål"



enkelt sammanhängande



ej enkelt sammanhängande

Om området är enkelt sammanhängande så gäller följande sats:

Sats: Ω enkelt sammanhängande

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow (P, Q) \text{ potentialfält}$$

Sammanfattning:

(4)

① $\int_{\gamma} P dx + Q dy$ oberoende av vägen i Ω

$\Uparrow \quad \Downarrow^*$

② (P, Q) potentialfält i Ω

** $\Uparrow \quad \Downarrow$

③ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i Ω

* om Ω böjvis sammanhängande

** om Ω enkelt sammanhängande

Ex: Tyngdkraftfältet

$$(P, Q) = (0, -mg)$$

har potentialfunktionen $U(x, y) = -mgy$, så precis som vi vill är kurvintegralen (=arbetet) oberoende av vägar.