

Föreläsning 20

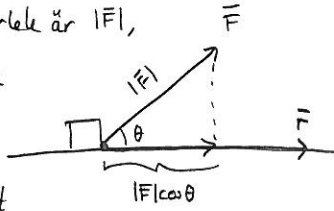
①

Vi ska nu integrera vektorer (eller rättare sagt ett vektorfält) över en kurva i xy-planet.

Motivering (fysik): Arbete = kraft · sträcka

Autag att vi drar ett föremål längs marken med kraften  $\vec{F}$ . Kraftens storlek är  $|\vec{F}|$ ,

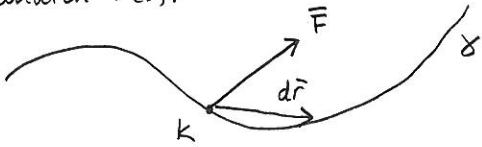
och i rörelseriktningen är den  $|\vec{F}|\cos\theta$ .



Om vi släpar föremålet vektor  $\vec{r}$ , dvs.  $|\vec{r}|$  långt, så blir arbetet

$$W = |\vec{F}|\cos\theta \cdot |\vec{r}| = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{r}}_{\text{skalärprodukt}}$$

Autag nu att vi har en kurva  $\gamma$  parametriserad av  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , och att en partikel  $K$  som rör sig längs  $\gamma$  påverkas av en kraft  $\vec{F}(\vec{r}(t))$  i punkten  $\vec{r}(t)$ :



OBS!  $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt =$  ③

$$= \int_a^b (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt =$$

$$= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

formel!

Anm: Kurvintegralen skrivs även

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy,$$

eftersom

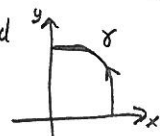
$$\int_{\gamma} (P x' + Q y') dt = \int_{\gamma} (P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt}) dt = \int_{\gamma} P dx + Q dy.$$

Ex: Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_{\gamma} xy dx + (x^2 + y^2) dy,$$

där  $\gamma$  är enhetscirkeln i positiv led från (1,0) till (0,1).

Lösning: Vi kan parametrisera  $\gamma$  med  $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$



Under en kort tid  $dt$  förflyttar sig  $K$  ungefär ②

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \vec{r}'(t) dt,$$

och under denna tid så uträttar kraftfältet arbetet

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt,$$

och över hela kurvan blir arbetet

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Med detta som motivering definierar vi kurvintegralen:

Vektorfält:  $\vec{F}(\vec{r}) = (P(\vec{r}), Q(\vec{r})) = (P(x,y), Q(x,y))$

Kurva:  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), a \leq t \leq b,$

$$\text{Kurvintegral: } \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Nu har vi  $\begin{cases} P(x,y) = xy \\ Q(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases}$  och  $\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t dt \\ dy = \cos t dt \end{cases}$  ④

$$I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos t \sin t}_{=P} \cdot \underbrace{(-\sin t) dt}_{=dx} + \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} \cdot \underbrace{\cos t dt}_{=dy} = \int_0^{\pi/2} (-\cos t \sin^2 t + \cos t) dt = \left[ -\frac{\sin^3 t}{3} + \sin t \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

Ex: Samma vektorfält som ovan, men nu är  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ,

där  $\gamma_1$ : räta linjestycket från (1,0) till (0,0)

$\gamma_2$ : " " " " (0,0) till (0,1)

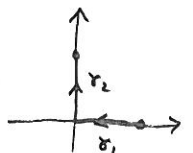
Lösning: Parametrisering

$$\gamma_1: \begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}, t: 1 \rightarrow 0 \quad \gamma_2: \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}, t: 0 \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow I = \int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} =$$

$$= \int_1^0 (t \cdot 0 \cdot 1 + (t^2 + 0^2) \cdot 0) dt +$$

$$+ \int_0^1 (0 \cdot t \cdot 0 + (0^2 + t^2) \cdot 1) dt = \int_0^1 t^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



Anm: I båda exemplen har vi rört oss från (1,0) till

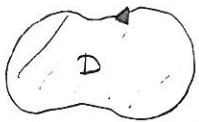
(0,1), men längs olika vägar, och fått olika resultat. (återkommer till detta!)

### Greens formel:

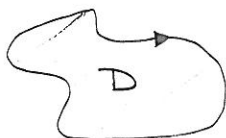
(5)

Randen  $\partial D$  till ett område  $D$  i planet kan vi se som en (eller flera) kurvor. Vi ger nu  $\partial D$  en riktning och säger att  $\partial D$  är positivt orienterad om vi har  $D$  på vänster sida när vi genomlöper  $\partial D$ .

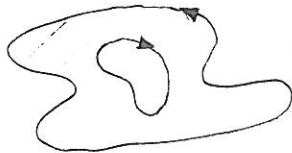
Ex:



Positivt orienterad



negativt orienterad



Positivt orienterad (trots att pilarna går åt "olika håll")

Det finns en sats (Greens formel) som knyter samman en dubbelintegral med en enkeltintegral över randen:

### Sats (Greens formel)

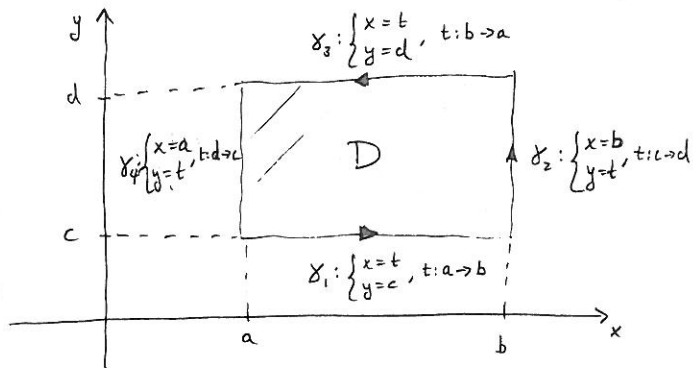
$P(x,y), Q(x,y)$  funktioner,  $D$  kompakt område i planet  
 $\partial D$  positivt orienterad rand

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

### Bevis av Greens formel:

(7)

Endast i det enklaste fallet där  $D$  är en rektangel:



$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ . Vi får

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P dx + Q dy &= \int_a^b (P(t,c) \cdot 1 + Q(t,c) \cdot 0) dt + \\ &+ \int_c^d (P(b,t) \cdot 0 + Q(b,t) \cdot 1) dt + \int_b^a (P(t,d) \cdot 1 + Q(t,d) \cdot 0) dt + \\ &+ \int_d^c (P(a,t) \cdot 0 + Q(a,t) \cdot 1) dt = \\ &= \int_a^b (P(t,c) - P(t,d)) dt + \int_c^d (Q(b,t) - Q(a,t)) dt \end{aligned}$$

Vi studerar dubbelintegralen:

(Läs själv exakta förutsättningar, Sats 9.1, s.291) (6)

Ex: Beräkna

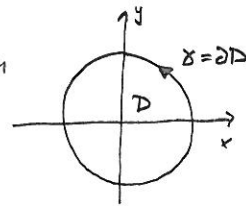
$$I = \int_{\gamma} y dx - x dy,$$

där  $\gamma$  är den positivt orienterade enhetscirkeln

Lösning: Direkt uträkning av

$\int_{\gamma}$  ger, med parametriseringen

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos p \\ y = \sin p \end{cases}, \quad p: 0 \rightarrow 2\pi$$



$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (\sin p \cdot (-\sin p) - \cos p \cdot \cos p) dp = \\ &= \int_0^{2\pi} -(\underbrace{\sin^2 p + \cos^2 p}_=1) dp = -2\pi. \end{aligned}$$

Med Greens formel får vi, då  $P=y, Q=-x$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 - 1 = -2,$$

$$I = \iint_D -2 dx dy = -2 \underbrace{\iint_D 1 dx dy}_{\substack{= \text{area av} \\ \text{enhetscirkeln} = \pi}} = \underline{-2\pi} \quad \text{stämmer!}$$

□

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_c^d \left( \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy \quad (8) \\ &- \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_c^d [Q(x,y)]_a^b dy - \int_a^b [P(x,y)]_c^d dx = \\ &= \int_c^d (Q(b,y) - Q(a,y)) dy - \int_a^b (P(x,d) - P(x,c)) dx = \\ &\stackrel{\text{byt inf. var.}}{=} \int_c^d (Q(b,t) - Q(a,t)) dt + \int_a^b (P(t,c) - P(t,d)) dt \end{aligned}$$

$$\text{dvs. } \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad \square$$