Föreläsning 17

1

Generaliserade integraler: $\iint_D f(x,y)\,dxdy$

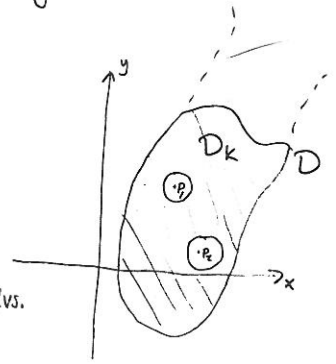
Hittills: Både området D och integranden $f(x,y)$ begränsade.

Nu: D eller $f(x,y)$ obegränsad. Generaliserad integral.

Man definierar en generaliserad integral på följande sätt:
Antag att D är obegränsad och att även $f(x,y)$ obegränsad nära t.ex. punkterna P_1 och P_2. Vi bildar en svit av (slutna, mätbara) mängder $D_1, D_2, D_3, \ldots$ som uppfyller

- alla D_k begränsade
- f begr. i alla D_k
- $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \ldots$

och $D_k \nearrow D$ då $k \to \infty$, dvs. "sviten växer ut mot D".



Def: Om $I = \lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy$ existerar (ändligt) och är oberoende av sviten D_k, så säger vi att $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ är konvergent med värde I.

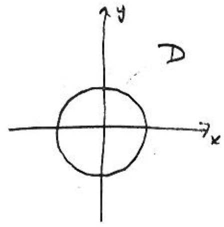
2

Sats: Om $f(x,y) \geq 0$ på D så är gränsvärdet
$$\lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dxdy$$
oberoende av sviten D_k.

Om $f(x,y) \geq 0$ så kan vi räkna "som vanligt". Ett ändligt resultat betyder att att integralen är konvergent, annars divergent.

Ex: Beräkna
$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy, \quad D: x^2+y^2 \geq 1$$
obegr. område!

Lösning: Sätt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$



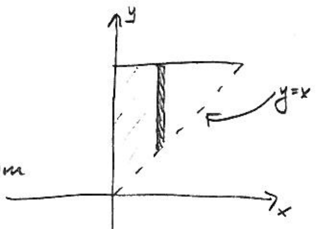
$\Rightarrow E: \begin{cases} r \geq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iint_E \frac{1}{(r^2)^2} \cdot r\,drd\varphi =$$
$$= \iint_E \frac{1}{r^3}\,drd\varphi = \left(\int_1^\infty \frac{1}{r^3}\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right) =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{r^{-2}}{-2}\right]_1^R \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \left(0-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}. \quad \square$$

3

Ex: Beräkna
$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dxdy,$$
där $D: x < y \leq 1,\ x \geq 0$.

Lösning: Rita området!
Generaliserad integral eftersom $\frac{1}{\sqrt{y-x}}$ obegr. nära linjen $y=x$.



$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[2\sqrt{y-x}\right]_x^1 dx =$$
$$= \int_0^1 2\sqrt{1-x}\,dx = 2\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 = -\frac{4}{3}(0-1) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

Anm: Egentligen $I = \int_0^1 \left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dy\right)dx =$

$= \ldots\ldots$ (Resultatet blir samma! Kolla!)

Ex: Beräkna
$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx \quad !$$

Lösning: Det finns ingen elementär primitiv till e^{-x^2}, men vi kan utnyttja en dubbelintegral på ett

4

tiffigt sätt för att beräkna I:

$$I^2 = I \cdot I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy =$$

OBS! Ger samma resultat!

$$\overset{\text{som vanligt "baklänges"}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = J.$$

Polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ gör att $\mathbb{R}^2$ övergår i

$E: \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$, så

$$I^2 = J = \iint_E e^{-r^2}\cdot r\,drd\varphi = \left(\int_0^\infty r e^{-r^2}\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\cdot d\varphi\right) =$$
$$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^R \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \left(0-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot 2\pi = \underline{\pi}.$$
$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \underline{\sqrt{\pi}}. \quad \square$$

Precis som i envariabelanalys har vi ett antal jämförelsesatser (s. 251):

Om $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ i D så gäller att

- $\iint_D g(x,y)\,dxdy$ konv. $\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy$ konv.
- $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ div. $\Rightarrow \iint_D g(x,y)\,dxdy$ div.

Ex: Visa att

$$I = \iint_D \frac{\arctan^2(xy)}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy, \quad D: x^2+y^2 \geq 1,$$

är konvergent.

Lösning: $-\frac{\pi}{2} < \arctan(xy) < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \arctan^2(xy) < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow$

$0 \leq \dfrac{\arctan^2(xy)}{(x^2+y^2)^2} < \dfrac{\pi^2}{4} \cdot \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}$ och

$\iint_D \dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$ är konvergent enligt tidigare exempel $\Rightarrow$ I konvergent.