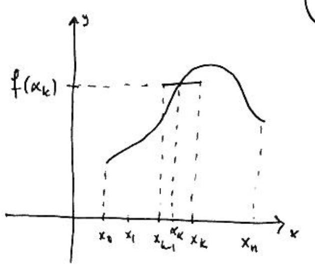
Föreläsning 16 (1)

Riemannsummor

I envariabelanalys definierade vi Riemannsumman via

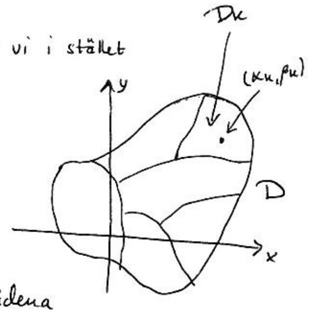


$$\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}).$$

För $f(x,y)$ definierad på D får vi i stället

$$\sum_{D_k \subseteq D} f(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k),$$

där $\mu(D_k)$ är arean av D_k.



Om f är kontinuerlig och områdena D_k blir "mindre och "mindre" så får vi

$$\sum_{D_k \subseteq D} f(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k) \longrightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

(dvs. integral = "∞ summa av ∞ små delar)

Samma sak gällde i endimfallet.

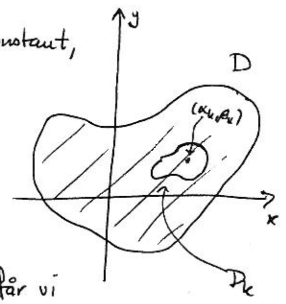
(2)

Ex: Plattan D har variabel ytdensitet $\rho(x,y)$ (kg/m²).

Vad är den totala massan av D?

Lösning: Om densiteten vore konstant, så skulle massan ges av

massa = ytdensitet · area
(kg) (kg/m²) (m²)



På en liten del D_k av plattan får vi

$\rho(x,y) \approx$ konstant $\rho(\alpha_k,\beta_k)$ för någon punkt (α_k,β_k) i D_k.

Vi får

massan av $D_k \approx \rho(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k)$

$\Rightarrow$ total massa $\approx \sum_{D_k \subseteq D} \rho(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k)$ Riemannsumma!

"Oändligt små" områden D_k ger nu

$$\boxed{\text{massan} = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy}$$

(Man brukar beteckna massan av en "oändligt liten" bit med dm: $m = \iint_D dm = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy$)

Variabelbyte (3)

I envariabelanalys gällde, för ett byte $x=2t$, att

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(2t)\cdot 2\,dt, \quad \text{eftersom } \frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow dx = 2dt.$$

Intervallet $I: -2 \le x \le 2$ ändras till intervallet $J: -1 \le t \le 1$.

Om i stället $x = -2t$ så får vi återigen $J: -1 \le t \le 1$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{-1} f(-2t)\cdot(-2)\,dt = \int_{-1}^{1} f(-2t)\cdot 2\,dt,$$

och eftersom $\frac{dx}{dt} = -2$ måste formeln bli

$$\int_I f(x)\,dx = \int_J f(x(t))\left|\frac{dx}{dt}\right|dt$$

abs.belopp!

Faktorn $\frac{dx}{dt}$ anger (med tecken) hur intervallet I ändras till intervallet J. Vi har tidigare sett att funktionaldeterminanten $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ anger hur en area i xy-planet förhåller sig storleksmässigt

(4)

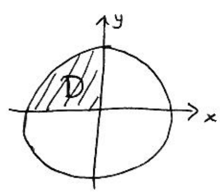
till en area i uv-planet då

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}.$$

Det verkar rimligt att vi för variabelbyten i dubbelintegraler får Sats 7.8, s. 238, dvs. multiplicera med determinanten vid variabelbyte!

Ex: Beräkna $I = \iint_D x^2 y\,dxdy$, där

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x \le 0,\ y \ge 0 \end{cases}.$$

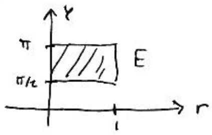


Lösning: Rita området D!

Eftersom det är en cirkelsektor provar vi att byta till polära koordinater. Med $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ svarar området

D i xy-planet mot området $E: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \end{cases}$ i $r\varphi$-planet.

En rektangel! (Mycket lättare!)



Vi beräknar funktionaldeterminanten:

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r.$$

Vi får nu

OBS! $|r| = r$

$$I = \iint_D x^2 y\,dxdy = \iint_E (r\cos\varphi)^2\cdot r\sin\varphi\cdot\left|\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)}\right| drd\varphi =$$

$$= \iint_E r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,drd\varphi = \int_0^1\left(\int_{\pi/2}^{\pi} r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)dr =$$

$$= \int_0^1 r^4\cdot\underbrace{\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)}\,dr =$$

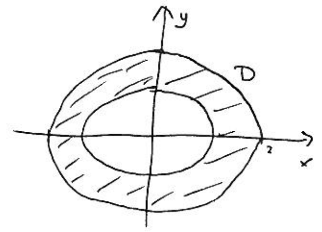
$$= \left(\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^1 r^4\,dr\right) =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi}\cdot\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}.\quad D$$

Jämför förra föreläsningen!

Ex: Beräkna $I = \iint_D x^2\,dxdy$, $D: 1 \le x^2+4y^2 \le 4$

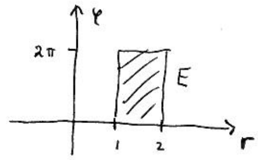
Lösning: Området D är en "ellipsring". Vi modifierar våra polära koordinater lite:



$$1 \le x^2 + (2y)^2 \le 2^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ 2y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{2}\sin\varphi \end{cases}$$ ger E: $1 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

En rektangel!



$$\frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{1}{2}r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}r\cos^2\varphi + \frac{1}{2}r\sin^2\varphi = \underline{\underline{\frac{1}{2}r.}}$$

$$\Rightarrow I = \iint_E (r\cos\varphi)^2\cdot\frac{1}{2}r\,drd\varphi = \frac{1}{2}\int_1^2 r^3dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \left[\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right] = \frac{1}{2}\int_1^2 r^3dr\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

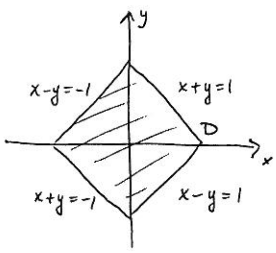
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2\cdot\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot(\pi+0-0) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot\pi = \frac{15}{8}\pi.\quad D$$

Ex: Beräkna $I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}\,dxdy$, där

D är kvadraten med hörn i $(1,0), (0,1), (-1,0)$ o $(0,-1)$.

Lösning: Vi ritar området!



Både integralen och området ger tips om att vi gör följande byte:

$$\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

Eftersom D kan skrivas $\begin{cases} -1 \le x+y \le 1 \\ -1 \le x-y \le 1 \end{cases}$ så får vi

då $E: \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$. En rektangel!

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow I = \iint_E \frac{u^2}{1+v^2}\,dudv = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2du\cdot\int_{-1}^1\frac{1}{1+v^2}\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^1\cdot\left[\arctan v\right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)(\arctan 1 - \arctan(-1))$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.\quad D$$