

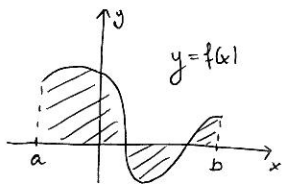
Föreläsning 15

①

Dubbelintegraler

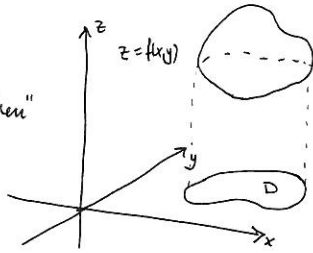
Funktion av en variabel:

$$\int_a^b f(x) dx = \text{area "med tecken"}$$



Funktion av två variabler:

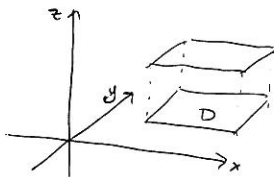
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \text{volym "med tecken"}$$



Hur definierar man dubbelintegraler?

Antag för enkelhets skull att området D är en rektangel. Det enklaste fallet är $f(x,y) = C$, där C är en konstant. Vi ska då beräkna volymen av en "låda";

$$\iint_D f(x,y) dx dy = C \cdot \text{area}(D)$$



Näst enklast är då D kan delas in i mindre rektanglar, där $f(x,y)$ är konstant i varje mindre

för alla Φ och Ψ

③

Def $\lambda = \iint_D f(x,y) dx dy$ är integralen av f över D .

Anm: Det går att utvidga definitionen till att hantera fallet då D ej är en rektangel.

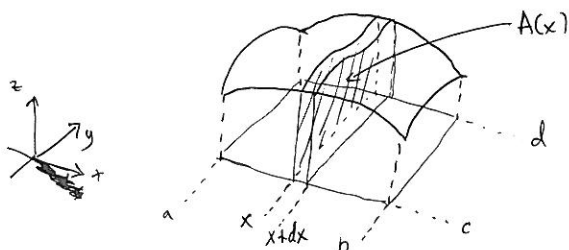
De (naturliga) räntelagarna för integraler på s.227 gäller.

Hur beräknar man en dubbelintegral (i fallet då D rektangel)?

Samma princip som i evariabelfallet:

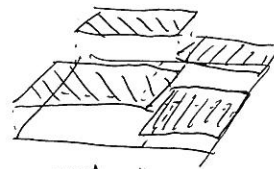
Integral = "summa av ∞ många ∞ små bitar"

För att beräkna $\iint_D f(x,y) dx dy$ skivar vi volymen i tunna skivor, parallella med yz -planet, med tjocklek dx .



rektangel:

$$\iint_D f(x,y) dx dy =$$



②

summan av volymer av "lådorna".

OBS! Om en låda ligger under xy -planet så ger den ett negativt bidrag till integralen. Funktionen ovan kallas trappfunktion.

Vi säger att en godtycklig funktion $f(x,y)$ är integrerbar på D om volymen under $f(x,y)$ kan approximeras godtyckligt väl med volymer av trappfunktioner, eller mer strikt, om det finns trappfunktioner $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$ sådana att

$$\Phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \Psi(x,y) \quad ; \quad D,$$

så att skillnaden

$$\iint_D \Psi(x,y) dx dy - \iint_D \Phi(x,y) dx dy$$

blir godtyckligt liten.

Då finns det ett entydligt tal λ med

$$\iint_D \Phi(x,y) dx dy \leq \lambda \leq \iint_D \Psi(x,y) dx dy$$

Om dx är litet så är volymen av en skiva

④

$dV = A(x)dx$. Summera nu dessa volymer:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b A(x) dx.$$

(För att för alla skivor låter vi x variera mellan a och b .)

För varje x -värde beräknas $A(x)$ som en (enkel)integral

i y -led: $A(x) = \int_c^d f(x,y) dy$. Vi får (Sats 7.3, s.229)

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

En dubbelintegral beräknas alltså genom att beräkna två enkelintegraler "efter varandra".

Motsvarande formel gäller om vi "skär" i omvänd ordning (dvs. i skivor parallella med xz -planet)

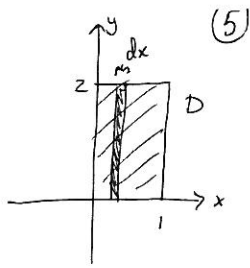
Ex: Beräkna

$$I = \iint_D x^3 y^2 dx dy, \quad \text{där } D$$

ges av $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Lösning:

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^3 y^2 dy \right) dx =$$



$$= \int_0^1 \left[x^3 \cdot \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{8}{3} x^3 dx = \left[\frac{8}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}$$

alternativt $I = \int_0^2 \left(\int_0^1 x^3 y^2 dx \right) dy =$

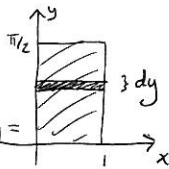
$$= \int_0^2 \left[\frac{x^4}{4} \cdot y^2 \right]_0^1 dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4} dy = \left[\frac{y^3}{12} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \cdot D$$

Ibland blir det en enkla primitiv på ett av hållen; då börjar man åt det hållet:

Ex: Beräkna

$$I = \iint_D y \cos(xy) dx dy, \text{ där } D$$

ges av $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.



Lösning: $I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 y \cos(xy) dx \right) dy =$

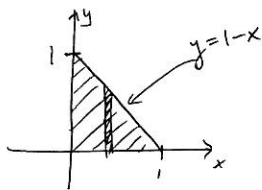
$$\Rightarrow I = I_1 \cdot I_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \right)^2 \quad (7)$$

Integration över godtyckliga områden D:

Vi gör "som vanligt", men beskriver nu området med hjälp av integrationsgränserna, som nu inte alltid är konstanter.

Ex: Beräkna $I = \iint_D \frac{y}{1+x} dx dy$ då D är triangeln med hörn i (0,0), (0,1) och (1,0).

Lösning: Rita området!



Om vi först integrerar i y-led, så skall y variera mellan 0 och $1-x$. Sedan låter vi x variera mellan 0 och 1. Vi får

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{y}{1+x} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2(1+x)} dx \stackrel{\text{Pol.div}}{=} \int_0^1 \frac{1}{2} \left(x - 3 + \frac{4}{x+1} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\sin(xy) \right]_0^1 dy = \int_0^{\pi/2} (\sin y - \sin 0) dy = \left[-\cos y \right]_0^{\pi/2} = -0 - (-1) = 1$$

(Prova gärna att göra det åt andra hållet!)

Vi kan som vanligt "flytta ut" alla konstanter i en integral:

Ex: Beräkna $I = \iint_D x y e^{-(x^2+y^2)} dx dy, D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Lösning: $I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \underbrace{x e^{-x^2}}_{\text{behandlas som konstant}} \cdot y e^{-y^2} dy \right) dx =$
↑ då vi integrerar m.p.y

$$= \int_0^1 x e^{-x^2} \cdot \left(\int_0^1 y e^{-y^2} dy \right) dx =$$

$$= \left(\int_0^1 y \cdot e^{-y^2} dy \right) \cdot \left(\int_0^1 x e^{-x^2} dx \right) = I_1 \cdot I_2$$

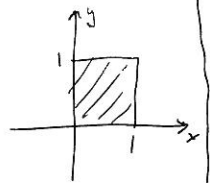
$$I_1 = I_2 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 3 + 4 \ln 2 - \ln 1 \right) = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}$$

Alternativt kan vi beräkna $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \frac{y}{1+x} dx \right) dy$.

OBS! Ett par sätt att räkna fel är

• $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x} dy \right) dx$ som ger integralen över hela kvadraten.

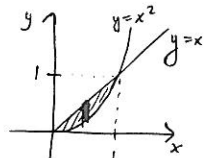


• $\int_0^{1-x} \left(\int_0^1 \frac{y}{1+x} dx \right) dy$ som är meningslös då resultatet blir en funktion av x (ska bli ett tal!)

Ex: Beräkna $I = \iint_D x y dx dy$ om $D: x^2 \leq y \leq x$.

Lösning: Rita först D!

Integrerar vi först i y-led så får vi



$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x x y dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^5) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{24}$$

Om x-led först, så

OBS! Inversfunktion

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^{1-y} x y dx \right) dy = \dots$$