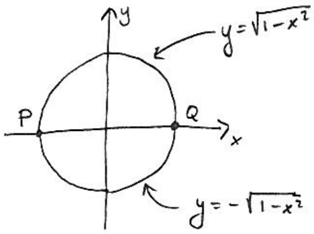
Föreläsning 14

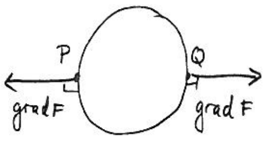
Genom $y=\sqrt{1-x^2}$ så ges y explicit som en funktion av x. Samma funktion ges implicit av

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Om vi studerar $x^2+y^2=1$ (enhetscirkeln) så kan vi lokalt lösa ut y som funktion av x överallt utom i punkterna P och Q. ⟵ Varför?

Om vi sätter $F(x,y)=x^2+y^2$, så är grad F vågrät i P och Q, dvs. $F'_y(P)=F'_y(Q)=0$.



Sats ("skiss") $F(x,y)=C$ nivåkurva och (a,b) punkt på denna. Om
$$F'_y(a,b)\neq 0$$
så kan y uttryckas som funktion av x, dvs. $y=y(x)$ i en omgivning av (a,b)

(För mer utförligt, se Sats 6.2, s. 204. Implicita funktionssatsen)

Ex: Visa att ekvationen

$$F(x,y)=y^5+xy-4=0$$

definierar y som funktion av x nära punkten $P:(3,1)$. ← ligger på kurvan (kolla!)

Bestäm även $y'(x)$ nära P; speciellt $y'(3)$.

Lösning: Vi har $F'_y=5y^4+x$, och speciellt

$$F'_y(3,1)=5\cdot 1^4+3=8\neq 0 \implies y=y(x) \text{ nära } P!$$

Implicit derivering av $y(x)^5+x\,y(x)-4=0$ ger

$$5y(x)^4\cdot y'(x)+1\cdot y(x)+x\cdot y'(x)-0=0$$

$$\iff y'(x)\left(5y(x)^4+x\right)+y(x)=0$$

$$\iff y'(x)=-\frac{y(x)}{5y(x)^4+x} \quad \text{eller} \quad y'=-\frac{y}{5y^4+x}.$$

I $(x,y)=(3,1)$ får vi $y'(3)=-\dfrac{1}{5\cdot 1^4+3}=-\dfrac{1}{8}$.

Anm: Vi kan inte lösa ut $y(x)$, men däremot bestämma $y'(x)$ för $x=3$! Satsen ovan gäller även för fler variabler (se sid. 205-208).