Föreläsning 11 (1)

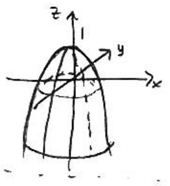
Optimering på icke-kompakta områden:

Nu finns inte garanterat största och minsta värde:

Ex: $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2$

har största värde $= 1$, men saknar minsta värde.

$(f(x,y) \to -\infty$ då $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty)$



Ex: Bestäm ev. största och minsta värde av

$$f(x,y) = (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}, \quad D_f = \mathbb{R}^2.$$

Lösning: $e^{-(x^2+y^2)}$ borde göra så att $f(x,y) \to 0$ "långt borta". Vi ser också att $f(x,y)$ antar både positiva $(f(1,0) = e^{-1})$ och negativa $(f(-1,0) = -e^{-1})$ värden $\Rightarrow$ största o minsta värde borde finnas!

Stationära punkter:
$$\begin{cases} f'_x = e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2x) = 0 \\ f'_y = 2e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^{-(x^2+y^2)} \neq 0)$$

(2)

$$\begin{cases} (x+2y)2x = 1 & ① \Leftrightarrow x+2y = \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0) \\ (x+2y)2y = 2 & ② \underset{①}{\Rightarrow} \frac{2y}{2x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x \end{cases}$$

Sätts in i ①: $(x+4x)2x = 1 \Leftrightarrow 10x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$,

och vi får punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$.

$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ och $f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$.

"Långt borta": $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$

$$f(x,y) = (r\cos\varphi + 2r\sin\varphi)e^{-r^2} = (\cos\varphi + 2\sin\varphi)re^{-r^2}$$

$$\Rightarrow 0 \le |f(x,y)| = \underbrace{|\cos\varphi + 2\sin\varphi|}_{\le 3} re^{-r^2} \le 3\frac{r}{e^{r^2}} \to 0 \text{ då } r \to \infty$$

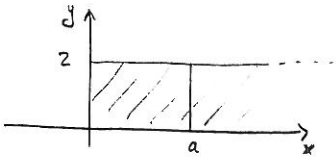
Alltså finns ett tal r_0 sådant att $|f(x,y)| < \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ då $r = \sqrt{x^2+y^2} \ge r_0$. På den kompakta mängden $D_{r_0}: \sqrt{x^2+y^2} \le r_0$ har $f(x,y)$ största/minsta värde, och dessa måste vara $\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ resp. $-\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$, vilket också måste gälla på hela $\mathbb{R}^2$.

Svar: $f_{max} = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$, $f_{min} = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$.

Ex: Bestäm ev. största o minsta värde till (3)

$$f(x,y) = x^2e^{-x-y} \quad i \ D_f: x \ge 0, 0 \le y \le 2.$$

Lösning: Studera först linjer $x = a$, $0 \le y \le 2$. Vi får



$$g(y) = f(a,y) = a^2e^{-a-y} = \underbrace{a^2e^{-a}}_{\text{konstant}} \cdot e^{-y} \text{ som}$$

är strängt avtagande (för varje a) $\Rightarrow$ störst då $y = 0$, minst då $y = 2$.

Eftersom $f(x,y) \ge 0$ och $f(0,y) = 0$ så är minsta värde $\underline{0}$. Vi letar efter största värde:

$\underline{y=0}$: $h(x) = f(x,0) = x^2e^{-x}$, $x \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 2$

Vi ser att $h(x)$ (och därmed $f(x,y)$) har största värde $4e^{-2}$.

	0		2	
$h'(x)$	0	+	0	−
$h(x)$		↗	$4e^{-2}$	↘

Svar: $f_{max} = 4e^{-2}$, $f_{min} = 0$.