Föreläsning 10

Optimering på kompakta områden

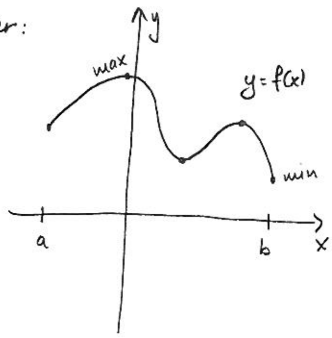
Bestäm största/minsta värde till en funktion.

Envdim: En kontinuerlig funktion $f(x)$ definierad på ett kompakt intervall $[a,b]$ (slutet = ändpunkterna ingår + begränsat) har ett största och minsta värde i någon av följande punkter:

i) stationära punkter, dvs. punkter x_0 där $f'(x_0)=0$

ii) ändpunkterna a o b

[iii) punkter x_0 där $f'(x)$ ej existerar]

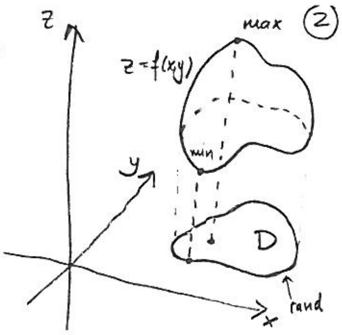


Flerdim: Vi behandlar först fallet $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En kontinuerlig funktion $f(x,y)$ definierad på ett kompakt område D i xy-planet (slutet = randen ingår + begränsat) har ett största och minsta värde i någon av följande punkter:

i) stationära punkter, dvs. punkter (x_0,y_0) där $(\text{grad} f)(x_0,y_0)=(0,0)$

ii) randpunkter

[iii) punkter där grad f ej existerar]



Varför? Jo, ett största/minsta värde svarar speciellt mot ett lokalt max/min, och en sådan ligger antingen på randen eller är en stationär punkt (tidigare föreläsning).

Metod: I) finn alla stationära punkter

II) finn alla randpunkter där största/minsta värde kan finnas

III) jämför funktionsvärdena i dessa punkter

Anm: II) blir ett "envariabelproblem"

Ex: Bestäm största och minsta värde till

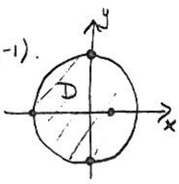
$f(x,y) = x^2 + x(y^2-1)$ i området $D: x^2+y^2 \le 1$.

I) $\begin{cases} f'_x = 2x + y^2 - 1 = 0 & (1) \\ f'_y = 2xy = 0 & (2) \end{cases}$

Ekv. (2) ger fallen $x=0$ och $y=0$.

$x=0$: (1) $\Leftrightarrow y^2-1=0 \Leftrightarrow y=\pm 1$, så vi får punkterna $(0,1)$ och $(0,-1)$.

$y=0$: (1) $\Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, ger punkten $(\frac{1}{2},0)$



Punkterna $(0,\pm 1)$ tillhör visserligen området, men eftersom de ligger på randen så kommer de ändå behandlas i punkt II). Den enda intressanta punkten härifrån är därför $(\frac{1}{2},0)$ med $f(\frac{1}{2},0) = \boxed{-\frac{1}{4}}$.

II) Randen $x^2+y^2=1$ kan parametriseras $\begin{cases} x=\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$, så här får vi envariabelfunktionen $g(t) = f(\cos t, \sin t) =$

$= \cos^2 t + \cos t(\sin^2 t - 1) = \cos^2 t + \cos t(-\cos^2 t) =$

$= \cos^2 t(1-\cos t) \ge 0$. Här ser vi, utan derivering, att $g(t)$ är som minst t.ex. då $\cos t = 0$, vilket svarar mot punkterna $(0,\pm 1)$, och vi har $f(0,\pm 1) = \boxed{0}$. Vidare är $g(t)$ som störst då $\cos t = -1$, vilket svarar mot $(-1,0)$, och vi har då $f(-1,0) = \boxed{2}$.

(Alternativt beräknar man $g'(t)$, sätter $g'(t)=0$, osv. ......)

III) Vi jämför sedan de inrutade värdena: $-\frac{1}{4}$, 0 och 2, och ser att 2 är störst och $-1/4$ minst. Svar: $f_{max}=2$, $f_{min} = -\frac{1}{4}$.

Ex: Bestäm största och minsta värde av

$$f(x,y) = x^2y - 3xy + 2x - 4y$$

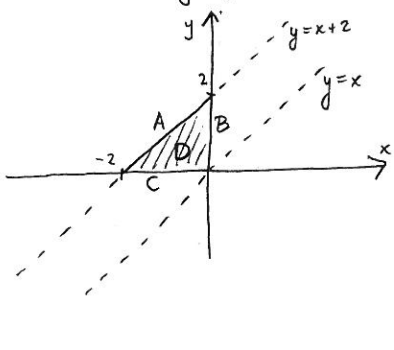
$$\text{i } D: \begin{cases} 0 \le y - x \le 2 \\ -2 \le x \le 0, \; y \ge 0. \end{cases}$$

Lösning: Vi ritar först D:

$0 \le y-x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le y-x$ och $y-x \le 2$

$\Leftrightarrow y \ge x$ och $y \le x+2$,

vilket betyder alla punkter ovanför och på linjen $y=x$ samt under och på linjen $y=x+2$. Samtidigt ska $-2 \le x \le 0$, $y \ge 0$, och vi får



(Notera att vi här faktiskt inte hade behövt kravet $0 \le y-x$!)

I) $\begin{cases} f'_x = 2xy - 3y + 2 = 0 & (1) \\ f'_y = x^2 - 3x - 4 = 0 & (2) \end{cases}$

(2) $\iff (x-4)(x+1) = 0 \iff x = 4$ eller $x = -1$

$x = 4$ ger en punkt utanför D, men $x = -1$ i (1) ger

$-2y - 3y + 2 = 0 \iff y = \frac{2}{5}$.

Vi får den inre stationära punkten $(-1, \frac{2}{5})$, där $f(-1, \frac{2}{5}) = \boxed{-2}$

i området (kolla!)

II) Randen består av tre delar A, B & C.

A) Linjestycket $y = x + 2$, $-2 \le x \le 0$, kan parametriseras $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \end{cases}$, $-2 \le t \le 0$, och vi får funktionen

$$g_1(t) = f(t, t+2) = t^2(t+2) - 3t(t+2) + 2t - 4(t+2) =$$
$$= t^3 + 2t^2 - 3t^2 - 6t + 2t - 4t - 8 =$$
$$= t^3 - t^2 - 8t - 8, \quad -2 \le t \le 0.$$

Vi optimerar denna som i envariabelanalys

$$g_1'(t) = 3t^2 - 2t - 8 = 0 \iff t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{8}{3} = 0$$

$$\iff t = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{3}} = \frac{1 \pm 5}{3} \iff t = 2 \text{ eller } t = -4/3.$$

$t = 2$ ger punkten $(2, 4)$ utanför området, så intressant punkt är $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} + 2) = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$, där $f(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) =$

$= g_1(-\frac{4}{3}) = \ldots = \boxed{-\frac{40}{27}}$.

Intressanta punkter är även ändpunkterna $t = -2$ och $t = 0$, som svarar mot "hörnen" $(-2, 0)$ och $(0, 2)$, med $f(-2, 0) = g_1(-2) = \boxed{-4}$ och $f(0, 2) = g_1(0) = \boxed{-8}$.

B) En parametrisering är $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$, $0 \le t \le 2$, och vi får $g_2(t) = f(0, t) = -4t$, som vi direkt ser är strängt avtagande. Endast ändpunkterna $t = 0$ & $t = 2$ är intressanta; $t = 0$ svarar mot $(0, 0)$ med $f(0, 0) = \boxed{0}$, medan $t = 2$ ger $(0, 2)$ som vi redan behandlat i A)

C) Parametrisering $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $-2 \le t \le 0$, ger funktionen

$$g_3(t) = f(t, 0) = 2t,$$

som är strängt växande (och ändpunkterna har redan behandlats i A) & B)).

III) Vi jämför nu inrutade funktionsvärden:

$$-2, \ -\frac{40}{27}, \ -4, \ -8, \ 0$$

minst största

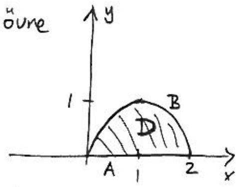
Svar: $f_{max} = 0$, $f_{min} = -8$ $\square$

Ex: Bestäm största och minsta värde till

$$f(x, y) = x e^{-x^2 - y^2}$$

på halvcirkelskivan $D: (x-1)^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$, samt ange max- och minpunkterna.

Lösning: Här rör det sig om den övre halvcirkelskivan med medelpunkt $(1, 0)$ och radie 1.



I) $\begin{cases} f'_x = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + x \cdot (-2x) e^{-x^2-y^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} = 0 & (1) \\ f'_y = -2xy e^{-x^2-y^2} = 0 & (2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) \\ x = 0 \text{ eller } y = 0 & (2) \end{cases}$

Vi får punkterna $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, varav endast $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ligger i området. Denna ligger dock på randen, och kommer ändå att behandlas i steg II.

II) Randen kan delas upp i A (linjestycket) och B (halvcirkeln):

A) Vi parametriserar linjestycket, $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $0 \le t \le 2$, och får $g_1(t) = f(t, 0) = t e^{-t^2}$, $0 \le t \le 2$.

Derivering ger $g_1'(t) = 1 \cdot e^{-t^2} + t \cdot (-2t) e^{-t^2} =$

$= e^{-t^2}(1 - 2t^2) = 0 \iff t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Endast $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i rätt intervall; denna svarar mot punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ med $g_1(\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}}$.

Viktiga punkter är dessutom ändpunkterna $t = 0$ & $t = 2$. Dessa svarar mot $(0, 0)$ resp. $(2, 0)$, och vi får $g_1(0) = f(0, 0) = \boxed{0}$ och $g_1(2) = f(2, 0) = \boxed{2e^{-4}}$.

B) Vi parametriserar halvcirkeln, $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$,

och får $g_2(t) = f(1 + \cos t, \sin t) =$

$= (1 + \cos t) e^{-(1+\cos t)^2 - \sin^2 t} = \ldots = (1 + \cos t) e^{-2 - 2\cos t}$.

Derivering ger $g_2'(t) = -\sin t e^{-2-2\cos t} + (1 + \cos t) 2 \sin t e^{-2-2\cos t} =$

$= e^{-2-2\cos t}(-\sin t + 2\sin t + 2\cos t \sin t) = e^{-2-2\cos t}(1 + 2\cos t)\sin t = 0$

$\iff 1 + 2\cos t = 0$ eller $\sin t = 0$

$\iff \cos t = -\frac{1}{2}$ eller $\sin t = 0$

$\iff t = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ eller $t = k\pi$ (k heltal)

Endast $t = \frac{2\pi}{3}$ är en inre punkt till intervallet $0 \le t \le \pi$. Denna svarar mot punkten $(1 - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ med funk. värdet $g_2(\frac{2\pi}{3}) = f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \boxed{\frac{1}{2} e^{-1}}$.

Ändpunkterna $t=0$ och $t=\pi$ studerade vi redan i A). (4)

III) Vi jämför de intressanta (inringade) värdena:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}, \quad 0, \quad 2e^{-4} \text{ och } \frac{1}{2}e^{-1}.$$

Klart att 0 är minst (övriga är positiva).

Vidare ser vi att $\frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} < \frac{1}{\sqrt{2e}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$,

och att $2e^{-4} = \frac{2}{e^4} < \frac{2}{2^4} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} < \frac{1}{2e} = \frac{1}{2}e^{-1}$!

Sammantaget är alltså

$$0 < 2e^{-4} < \frac{1}{2}e^{-1} < \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

Svar: Största värde $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ i punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

Minsta värde 0 i punkten $(0,0)$.

Anm: Alternativ till parametrisering av halvcirkeln $(x-1)^2+y^2=1$, $y \geq 0$, får vi genom

$$y = \underset{(-)}{+}\sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}$$

och låta $x=t$. Detta ger $\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{2t-t^2} \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2$,

och således får vi

$$g(t) = f(t, \sqrt{2t-t^2}) = te^{-t^2-(2t-t^2)} = te^{-2t}.$$

Derivering ger $g'(t) = 1 \cdot e^{-2t} + t \cdot (-2)e^{-2t} =$ (10)

$= e^{-2t}(1-2t) = 0 \iff t = \frac{1}{2}$,

som svarar mot punkten $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

precis som ovan.