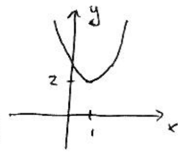
Föreläsning 1

1

Analytisk geometri

Geometri i $\mathbb{R}^2$ (= planet)



Ex: Rita kurvan $y = x^2 - 2x + 3$!

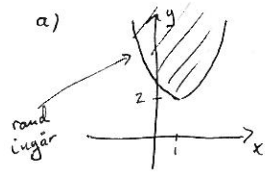
Kvad. kompl. ger $y = (x-1)^2 + 2$, så vi får en parabel med vertex $(1,2)$.

Ex: Rita de mängder i $\mathbb{R}^2$ som ges av

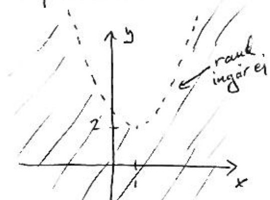
a) $y \geq x^2 - 2x + 3$ b) $y < x^2 - 2x + 3$!

I a) får vi $y \geq (x-1)^2 + 2$, dvs. alla punkter över och på parabeln $y = (x-1)^2 + 2$. I b) får vi alla punkter under men ej på denna parabel.

a)



b)



Parabeln är rand till båda mängderna. Mängden i a) är sluten (= innehåller hela sin rand), medan den i b) är öppen (= innehåller ingen del av sin rand).

Båda mängderna är obegränsade.

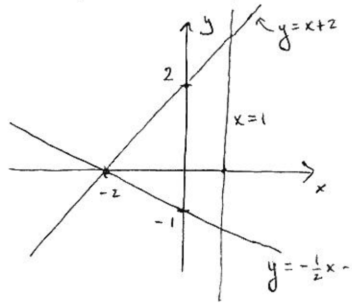
Med olikheter får vi alltså i allmänhet områden 2

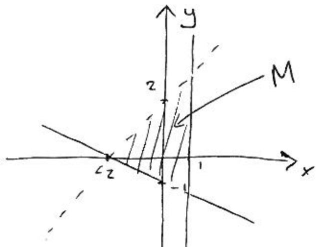
Ex: Rita området

$$M = \{(x,y);\ -\tfrac{1}{2}x - 1 \leq y < x + 2,\ x \leq 1\}$$

Vi har tre olikheter: $-\frac{1}{2}x - 1 \leq y$, $y < x+2$, $x \leq 1$.

Rita först randen, dvs. då vi har likhet:



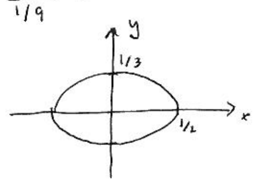


M är begränsad, men varken öppen eller sluten.

Ex: Rita kurvan $4x^2 + 9y^2 = 1$!

$$4x^2 + 9y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{1/9} = 1$$

$$\iff \frac{x^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/3)^2} = 1$$



ellips med halvaxlar $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$!

Alternativ: Skär med koordinataxlarna!

3

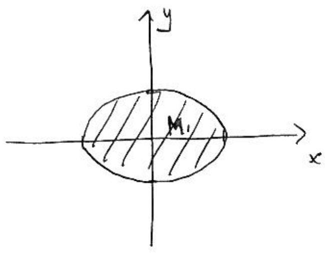
x-axeln har ekv. $y = 0$. Insättning i ekv. ger $4x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{2}$

y-axeln har ekv. $x = 0$. Vi får $9y^2 = 1 \iff y = \pm\frac{1}{3}$.

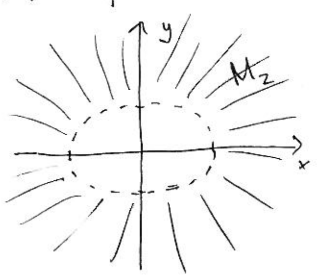
Ex: Rita mängderna

$$M_1 = \{(x,y);\ 4x^2 + 9y^2 \leq 1\},\quad M_2 = \{(x,y);\ 4x^2 + 9y^2 > 1\}.$$

Rita först randen (likhet). Vi får ellipsen ovan i båda fallen!



sluten + begränsad
= kompakt mängd



öppen, obegränsad

Anm: Tycker du att det är svårt att se vad som är "insida/utsida", så prova med en punkt, t.ex. origo (0,0). Denna uppfyller villkoret i M_1, men ej i M_2.

Övning: Rita hyperbeln $4x^2 - 9y^2 = 1$!

- Vilken axel skär hyperbeln? Var?
- Asymptoter? (Repetera!)

4

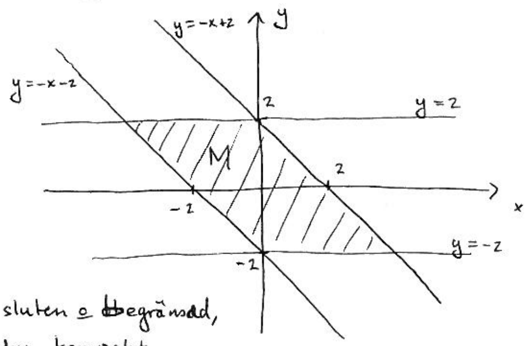
Ex: Rita området

$$M = \{(x,y);\ |x+y| \leq 2,\ |y| \leq 2\}.$$

Det gäller att

- $|x+y| \leq 2 \iff -2 \leq x+y \leq 2 \iff -2 \leq x+y$ o $x+y \leq 2$ $\iff y \geq -x-2$ o $y \leq -x+2$
- $|y| \leq 2 \iff -2 \leq y \leq 2 \iff -2 \leq y$ o $y \leq 2$ $\iff y \geq -2$ o $y \leq 2$

Totalt fyra olikheter. Rita först randen (likhet):



M sluten o begränsad, dvs. kompakt.

Övning (överkurs): $M = \{x;\ x \in \mathbb{Q},\ 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}$

Är M öppen/sluten? Vad blir randen?

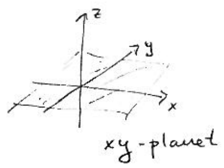
Här måste du gå tillbaka till de matematiska definitionerna (s. 7–9 i boken)

Geometri i $\mathbb{R}^3$ (=rummet)

Ex: Rita alla punkter (x,y,z) i $\mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$z = x^2 + y^2 \quad !$$

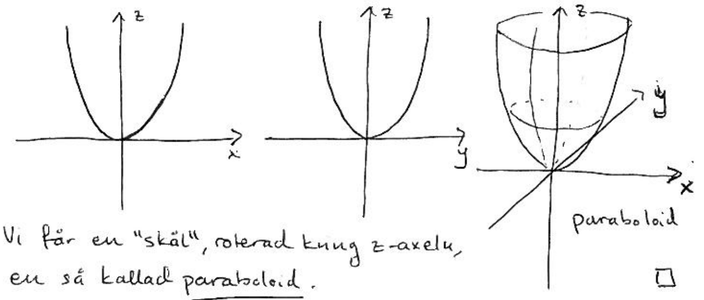
Vi skär med koordinatplanen!



xz-planet har ekv. $y=0 \Rightarrow z = x^2$

yz-planet har ekv. $x=0 \Rightarrow z=y^2$

(xy-planet har ekv. $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$, dvs. punkten $(0,0,0)$)



Vi får en "skål", roterad kring z-axeln, en så kallad paraboloid. □

En ekvation i $\mathbb{R}^3$ ger i allmänhet en yta.

Allmänt gäller att varje mängd med ekvation av formen

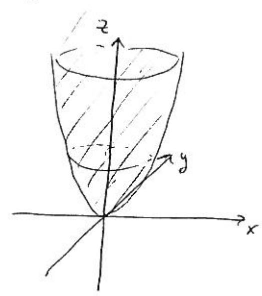
$$z = f(r) \quad \text{där} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (*)$$

är rotationssymmetrisk på detta sätt.

Anm: $\sqrt{x^2+y^2}$ betecknar avståndet från punkten (x,y,z) till z-axeln, så $(*)$ säger att z-värdet endast beror av detta avstånd.

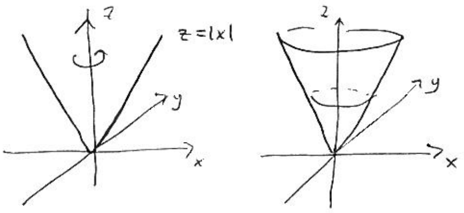
Ex: Skissera mängden $z \geq x^2+y^2$!

Vi får området ovanför paraboloiden. En olikhet i $\mathbb{R}^3$ ger alltså i allmänhet en kropp. Själva paraboloiden är rand till mängden, som är sluten men ej begränsad.



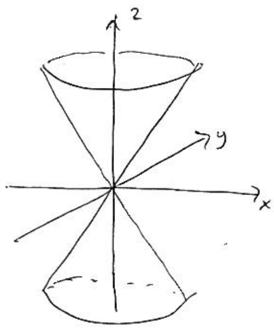
Ex: Rita ytan $z = \sqrt{x^2+y^2}$!

Ytan är rotationssymmetrisk kring z-axeln $(f(r)=r)$. Skärning med t.ex. xz-planet $y=0$ ger $z = \sqrt{x^2} = |x|$. Vi får en kon!



Ex: Rita ytan $z^2 = x^2+y^2$!

$z^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, där $z=\sqrt{x^2+y^2}$ är konen ovan och $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ dess "upp-o-ner-vända" spegelbild. Vi får en "dubbelkon".

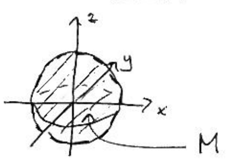


Ex: Skissera mängden

$$M = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 < 9\}.$$

Eftersom $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ anger avståndet från (x,y,z) till origo så blir $x^2+y^2+z^2=9$ sfären med radie 3 och medelpunkt origo. Alltså blir M innandömet (klotet), där själva sfären ej ingår.

M är en öppen, begränsad mängd.



Ex: Rita ytan $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - \frac{x}{2} + \frac{2z}{9} - \frac{23}{36} = 0$!

Kvadratkomplettera x o z var för sig:

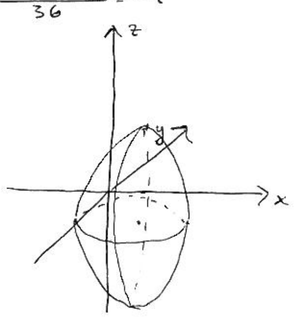
$$\tfrac{1}{4}(x^2-2x) + y^2 + \tfrac{1}{9}(z^2+2z) - \tfrac{23}{36} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{4}\left((x-1)^2-1\right) + y^2 + \tfrac{1}{9}\left((z+1)^2-1\right) - \tfrac{23}{36} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{4}(x-1)^2 + y^2 + \tfrac{1}{9}(z+1)^2 \underbrace{- \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{23}{36}}_{= \frac{-9-4-23}{36} = -1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + y^2 + \left(\frac{z+1}{3}\right)^2 = 1$$

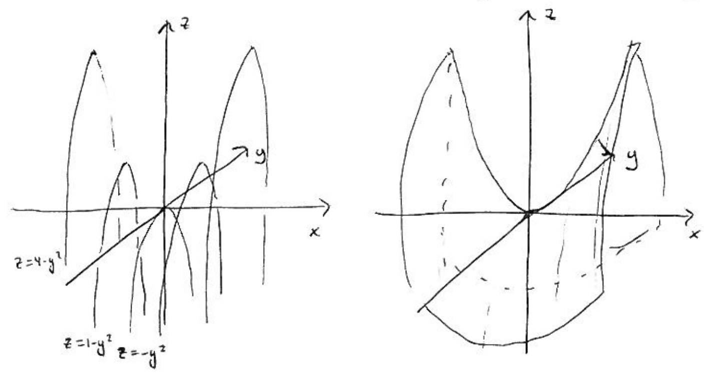
Vi får en sfär med medelpunkt $(1,0,-1)$ och radie 1, utdragen faktorn 2 i x-led och faktorn 3 i z-led. Kallas ellipsoid.



Ex: Skissera ytan $z = x^2 - y^2$!

Prova att skära med några plan parallella med t.ex. yz-planet $x=0$:

$\underline{x=0}$: $z = -y^2$, $\underline{x=\pm 1}$: $z = 1-y^2$, $\underline{x = \pm 2}$: $z = 4-y^2$



Vi får en så kallad hyperbolisk paraboloid (en "sadel").

Ex: Skissera ytan $z = x^2$!

Ekvationen beror ej av y, så ytan ser likadan ut i varje plan $y=C$. Vi får en "ränna" (parabolisk cylinder)