Ford. 8

2.25. a) Transformera differentialekvationen (1)

$$y f'_x - x f'_y = xyf \qquad (*)$$

genom att utföra variabelbytet

$$\begin{cases} x^2+y^2 = u \\ e^{-x^2/2} = v \end{cases}$$

Lösning: $\boxed{f(u,v) = f(u(x,y), v(x,y))}$

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot 2x + f'_v \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x) = $$
$$= 2x f'_u - x e^{-x^2/2} f'_v$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u \cdot 2y + f'_v \cdot 0 =$$
$$= 2y f'_u$$

Ekv. (*) blir

$$y \cdot (\cancel{2x f'_u} - x e^{-x^2/2} f'_v) - x \cdot \cancel{2y f'_u} = xyf$$

$$\Leftrightarrow \quad -xy e^{-x^2/2} f'_v = xyf$$

$$\Leftrightarrow \quad -e^{-x^2/2} f'_v = f \quad \Leftrightarrow \quad -v f'_v = f$$

$$\Leftrightarrow \quad f'_v + \frac{1}{v} f = 0$$

b) Bestäm den lösning $f(x,y)$ till ekvationen, (2)
för vilken $f(0,y) = y^2$.

$$f'_v + \frac{1}{v} f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dv}(v \cdot f) = 0$$

IF: $e^{\ln|v|} = e^{\ln v} = v$

$v > 0$

$$\Leftrightarrow \quad v \cdot f = \varphi(u)$$ där φ är en godt. C^1-funktion av en variabel

$$\Leftrightarrow \quad f = \frac{1}{v} \varphi(u)$$

Detta ger lösningarna $f(x,y) = e^{x^2/2} \varphi(x^2+y^2)$

Villkor: $f(0,y) = \underbrace{e^0}_{=1} \varphi(y^2) = y^2$,

betyder att $\varphi(t) = t \quad (t \geq 0)$

Svar: $f(x,y) = e^{x^2/2}(x^2+y^2)$

2.34. Betrakta funktionen (3)

$$f(x,y) = xy \sin x \quad \text{i punkten } \left(\tfrac{\pi}{2}, 1\right).$$

a) I vilken riktning växer f snabbast?
Hur stor är tillväxten i denna riktning?

Lösning: I gradientens riktning!

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y) = (y \sin x + xy \cos x, \; x \sin x)$$

$$\Rightarrow (\text{grad } f)\left(\tfrac{\pi}{2}, 1\right) = \left(1 \cdot \sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \cos\tfrac{\pi}{2}, \; \tfrac{\pi}{2} \cdot \sin\tfrac{\pi}{2}\right) = \left(1, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

I denna riktning är riktningsderivatan

$$\left|\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}$$

Svar: $(1, \pi/2)$ resp. $\sqrt{1 + \pi^2/4}$

b) Beräkna riktningsderivatan av f i riktningen $(-3,4)$.

Lösning: Riktning $(-3,4)$. Normera! $\bar{v} = \frac{1}{5}(-3,4)$

$\boxed{f'_{\bar{v}} = (\text{grad } f) \cdot \bar{v}}$ skalärprodukt

Svar: $\frac{2\pi - 3}{5}$

Vi får

$$f'_{\bar{v}}\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = \left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}(-3,4) = \frac{2\pi - 3}{5}$$

c) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ (4)
i den punkt på ytan där $x = \frac{\pi}{2}$ och $y = 1$.

Lösning:

Tangentplan:

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

I vårt fall är $(a,b) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, och

$$\begin{cases} f'_x\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = 1 \\ f'_y\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \frac{\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vi får därför ekv.

$$z = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(y-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x + \frac{\pi}{2} y - \frac{\pi}{2}$$

D

2.46. a) Rita några nivåkurvor till

$$f(x,y) = xy,$$

och sätt ut grad f i några punkter.
Ange också betydelsen av gradientens längd.

Lösning: Nivåkurvor $f(x,y) = C$

C = 0: $xy = 0 \iff x = 0$ eller $y = 0$
De två koordinataxlarna!

C = 1: $xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$

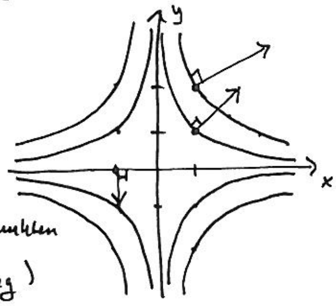
C = −1: $xy = -1 \iff y = -\frac{1}{x}$

C = 2: $xy = 2 \iff y = \frac{2}{x}$

C = −2: $xy = -2 \iff y = -\frac{2}{x}$

$$\text{grad } f = (f'_x, f'_y) = (y, x)$$

T.ex. $(\text{grad } f)(1,1) = (1,1)$
$(\text{grad } f)(1,2) = (2,1)$
$(\text{grad } f)(-1,0) = (0,-1)$



Gradientens längd = den maximala riktn.derivatan i punkten (fås i gradientens riktning)

b) Bestäm tangentplanet i punkten P:(2,1,4) till ytan

$$z = f(x,y) = x^2y^3.$$

Lösning: Vi kontrollerar först att P ligger på ytan:

$$4 = 2^2 \cdot 1^3 \quad \text{ok!}$$

Tangentplan:

$$\boxed{z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}$$

Vi får $\begin{cases} f'_x = 2xy^3 \\ f'_y = 3x^2y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(2,1) = 4 \\ f'_y(2,1) = 12 \end{cases}$, och

$$z = 4 + 4(x-2) + 12(y-1) \iff$$

$$4x + 12y - z - 16 = 0$$

Alt. lösning: Se ytan som en nivåyta

$$F(x,y,z) = z - x^2y^3 = 0 \qquad !$$

$$\text{grad } F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (-2xy^3, -3x^2y^2, 1)$$

$\Rightarrow (\text{grad } F)(2,1,4) = (-4, -12, 1)$

Denna är en normalvektor till tangentplanet, så ekv. ges av $-4x - 12y + z + D = 0$

Insättning av P i ekv. ger $D = 16$, dvs. ekv.

$$4x + 12y - z - 16 = 0$$