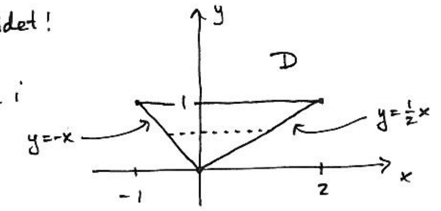
Uppgifter Föreläsning 19

6.15. Beräkna

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{1+(x-2y)^2}$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,1)$ och $(-1,1)$.

Lösning: Rita området!



Enklast att integrera i x-led först!

Gränserna ska då uttryckas i y: $\begin{cases} y=-x \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ x=2y \end{cases}$.

Vi får

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{2y} \frac{1}{1+(x-2y)^2}\,dx \right) dy = \int_0^1 \Big[\arctan(x-2y)\Big]_{-y}^{2y} dy =$$

$$= \int_0^1 (\underbrace{\arctan 0}_{=0} - \arctan(-3y))\,dy = \int_0^1 \arctan(3y)\,dy =$$

udda

$$= \Big[y\arctan(3y)\Big]_0^1 - \int_0^1 y\cdot\frac{3}{1+9y^2}\,dy = \arctan 3$$

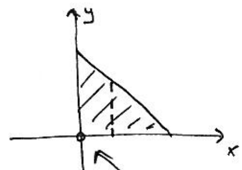
$$- \Big[\tfrac{1}{6}\ln(1+9y^2)\Big]_0^1 = \underline{\underline{\arctan 3 - \tfrac{1}{6}\ln 10}}. \qquad \square$$

6.38. För vilka reella α konvergerar

$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^\alpha}\,dx\,dy \;?$$

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le x \le 1\}.$$

Lösning: Rita området!



Vi får

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{1}{(x+y)^\alpha}\,dy \right) dx =$$

ej def. då $\alpha>0$

Räcker studera fallet $\alpha>0$.

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{1-\alpha}(x+y)^{1-\alpha}\right]_0^{1-x} dx & \text{då } 0<\alpha<1 \\[2ex] \displaystyle\int_0^1 \Big[\ln(x+y)\Big]_0^{1-x} dx & \text{då } \alpha=1 \\[2ex] \displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{(x+y)^{\alpha-1}}\right]_0^{1-x} dx & \text{då } \alpha>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \bullet\ \displaystyle\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 (1-x^{1-\alpha})\,dx = \dots = \frac{1}{2-\alpha} & \text{då } 0<\alpha<1 \quad \text{konv.} \\[2ex] \bullet\ \displaystyle\int_0^1 (-\ln x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 (-\ln x)\,dx = \\ \quad = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\Big[-x\ln x\Big]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx \right) = \\ \quad = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\varepsilon\ln\varepsilon + (1-\varepsilon)\Big) = 0+1-0 = 1 & \text{konv. då } \alpha=1 \\[2ex] \bullet\ \displaystyle\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) dx & \text{då } \alpha>1 \end{cases}$$

Återstår fallet $\alpha>1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx \quad \text{konv.} \iff \alpha-1<1$$

enl. Sats i endim

$$\iff \alpha<2$$

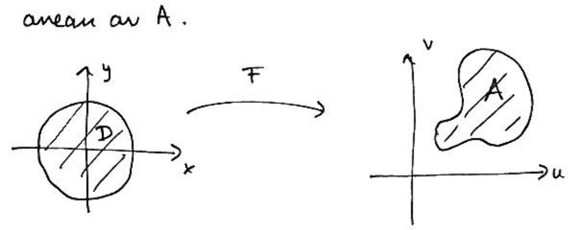
Svar: I konvergent då $\underline{\underline{\alpha<2}}$.

6.45. Genom avbildningen

$$F: \begin{cases} u = x^3 \\ v = y^3 \end{cases}$$

överförs cirkelskivan $D: x^2+y^2 \le 1$ i ett område A. Beräkna arean av A.

Lösning:



$$\text{Area}(A) = \iint_A 1\,du\,dv = \iint_D 1\cdot\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| dx\,dy =$$

$$\overset{*)}{=} \iint_D |9x^2y^2|\,dx\,dy = \iint_D 9x^2y^2\,dx\,dy =$$

$$\boxed{*)\quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \left|\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}\right| = 9x^2y^2}$$

pol. koord.

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta \right)\cdot\left(\int_0^1 9r^5\,dr \right) =$$

(5)

$$\overset{**)}{=} \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\,d\theta \cdot \left[\frac{9r^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{8}}$$

**)

$$\cos^2\theta\sin^2\theta = \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)$$

$$\cos 4\theta = \cos(2\cdot 2\theta) = 1 - 2\sin^2(2\theta)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(2\theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta$$

6.56. Beräkna (6)

$$I = \iint_D 12y\,dx\,dy,$$

där D är området begränsat av linjen $x = 2y-5$ och parabeln $x = 4y - 2 - y^2$.

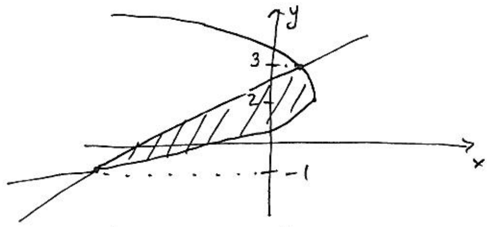
Lösning: Rita området!

$$x = -y^2 + 4y - 2 = -(y^2 - 4y + 2) = -((y-2)^2 - 4 + 2) =$$

$$= -(y-2)^2 + 2$$

Skärning: $2y - 5 = 4y - 2 - y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow y = 3$ eller $y = -1$



$$I = \int_{-1}^{3}\left(\int_{2y-5}^{4y-2-y^2} 12y\,dx\right)dy = \int_{-1}^{3} 12y\underbrace{\left(4y-2-y^2-(2y-5)\right)}\,dy =$$

$$= 12\int_{-1}^{3}\left(-y^3 + 2y^2 + 3y\right)dy = 12\left[-\frac{y^4}{4} + \frac{2}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2\right]_{-1}^{3} = \ldots = \underline{\underline{128}}.$$