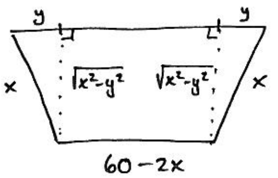
(1)

4.41. En 60 cm bred rektangulär plåtremsa skall vikas till en öppen ränna, vars tvärsnitt har formen av ett parallelltrapets med de icke-parallella sidorna lika långa. Hur stor kan tvärsnittets yta maximalt göras?

Lösning:

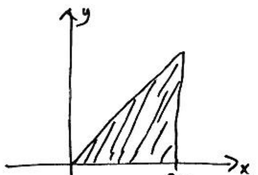


$$A(x,y) = (60-2x)\cdot\sqrt{x^2-y^2} + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot y\sqrt{x^2-y^2} =$$

$$= (60-2x+y)\sqrt{x^2-y^2}, \qquad 0 \le x \le 30$$
$$0 \le y \le x.$$ OBS!

Kont. funktion på kompakt område!

$\Rightarrow$ A_{max} & A_{min} existerar.



stat. punkter:

$$A'_x = -2\sqrt{x^2-y^2} + (60-2x+y)\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0$$

$$A'_y = \sqrt{x^2-y^2} - (60-2x+y)\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(60-2x+y) = 2(x^2-y^2) & (1) \\ y(60-2x+y) = x^2-y^2 & (2) \end{cases}$$

(2)

Det följer t.ex. att

$$x\,(\underbrace{60-2x+y}_{>0}) = 2\cdot y\,(\underbrace{60-2x+y}_{>0}) \quad \text{(i det "inre")}$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{x = 2y}}$. Detta ger insatt i (2):

$$y(60-2\cdot 2y+y) = (2y)^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow \; -3y^2 + 60y = 4y^2 - y^2 \;\Leftrightarrow\; 6y^2 = 60y$$

$$\Leftrightarrow \; 6y(y-10) = 0 \;\Leftrightarrow\; (y=0) \text{ eller } y = 10$$
$$\Rightarrow \; x = 2\cdot 10 = 20$$

Enda stat. pkt. $(20,10)$

$$A(20,10) = 30\sqrt{300}$$

Randen: $y=0$: $g(x) = A(x,0) = (60-2x)\sqrt{x^2} = 60x - 2x^2$ $(0 \le x \le 30)$

$\Rightarrow$ $g'(x) = 60 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 15$

Intr. pkt. $(15,0)$. $A(15,0) = 30\cdot\sqrt{15^2} = 30\sqrt{225}$

$x = 30$: $A(30,y) = \boxed{0}$ Intr. pkt. $(30,y)$, $0 \le y \le 30$

$y = x$: $A(x,x) = \boxed{0}$. Intr. pkt. (x,x), $0 \le x \le 30$.

Hörnen redan behandlade ovan!

Svar: $A_{max} = 30\sqrt{300} = \underline{\underline{300\sqrt{3}}}$ cm².

(3)

4.47. Ytan

$$z = F(x,y) = 10 + x^2 + xy, \quad x^2 + \frac{y^2}{5} \le 1$$

beskriver ett terrängavsnitt i en bergskedja. Var på berget och i vilken riktning har berget störst lutning? Ange även lutningen.

Lösning: $\operatorname{grad} F = (2x+y, x)$.

Största lutning är $|(2x+y,x)| = \sqrt{(2x+y)^2 + x^2}$.

Vi vill maximera

$$f(x,y) = (2x+y)^2 + x^2 \quad \text{över } D: x^2 + \frac{y^2}{5} \le 1.$$

Kompakt!

Stat. punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 4(2x+y) + 2x = 0 & (1) \\ f'_y = 2(2x+y) = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) ger $2x+y=0$. Insättning i (1) ger

$4\cdot 0 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vi får då $y=0$.

Enda stat. punkt är $(0,0)$. $f(0,0) = 0$.

(4)

Randen: $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ (bivillkor!)

Lagranges multiplikatormetod:

$$\operatorname{grad} f = (4(2x+y) + 2x,\; 2(2x+y))$$
$$\operatorname{grad} g = (2x, \tfrac{2}{5}y)$$

$$\begin{vmatrix} 4(2x+y)+2x & 2(2x+y) \\ 2x & \frac{2}{5}y \end{vmatrix} = \frac{8}{5}y(2x+y) + \frac{4xy}{5} - 4x(2x+y) =$$

$$= \frac{16}{5}\cancel{x}y + \frac{8}{5}y^2 + \frac{4}{\cancel{5}}\cancel{x}y - 8x^2 - 4\cancel{x}y = 8\left(\frac{1}{5}y^2 - x^2\right) = 0$$

Kombinera med bivillkoret $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{5} = 1 - x^2$:

$$8\left((1-x^2) - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Detta ger $y = \pm\sqrt{5-5x^2} = \pm\sqrt{5-5\cdot\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Intr. punkter $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 2 + \frac{5}{2} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} = 5 + \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = \left(\tfrac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= 2 + \tfrac{5}{2} - 2\sqrt{5} + \tfrac{1}{2} = 5 - 2\sqrt{5}$$

<u>Svar:</u> Maximal lutning $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ i punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ och $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. Riktningen är

$$(\operatorname{grad} F)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = \left(2\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{5}, 1\right)$$

esp. $$(\operatorname{grad} F)\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right) = \left(2\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\tfrac{5}{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-(2+\sqrt{5}), -1\right)$$