3.39. I en omgivning av punkten $(1, \pi/3)$ kan kurvan (1)

$$F(x,y) = 2\cos(xy) - x = 0$$

skrivas på formen $y = y(x)$.

a) Visa detta med hjälp av satsen om implicita funktioner samt ange formeln för y'.

b) Visa detta genom att bestämma $y(x)$.

Lösning: a) $F'_y = -2x\sin(xy)$

$$\Rightarrow \quad F'_y(1, \pi/3) = -2 \cdot 1 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \neq 0$$

Resultatet följer nu av implicita funktionssatsen.

Med $y = y(x)$ har vi

$$2\cos(xy(x)) - x = 0.$$

Derivera ledvis!

$$-2\sin(xy(x))\left(1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x)\right) - 1 = 0$$

alt. $\quad -2\sin(xy)(y + xy') - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -2x\sin(xy)y' = 1 + 2y\sin(xy)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{1 + 2y\sin(xy)}{2x\sin(xy)}}$$

(2)

b) $2\cos(xy) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(xy) = \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \quad xy = \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

då $0 \leq xy \leq \pi$

OK, då nära $(1, \pi/3)$

Svar: $y(x) = \frac{1}{x}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

c) Bestäm y' genom att derivera funktionen i b)

d) Kontrollera att derivatan i a) och c) ger samma värde på $y'(1)$.

e) Skissera kurvan alldeles i närheten av punkten $(1, \pi/3)$.

Lösning: c) $y'(x) = -\frac{1}{x^2}\arccos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \cdot \frac{1}{2}$

d) I a)-uppg: $y'(1) = -\frac{1 + 2y(1)\sin(1 \cdot y(1))}{2 \cdot 1 \cdot \sin(1 \cdot y(1))} =$

$$= -\frac{1 + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{2\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{1 + 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} =$$

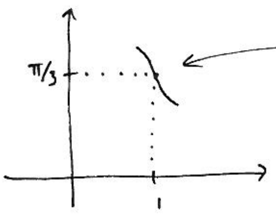
$$= -\frac{\pi + \sqrt{3}}{3}$$

I c)-uppg: $y'(1) = -\frac{1}{1}\arccos\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{1} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{2} =$

$$= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{\pi + \sqrt{3}}{3} \qquad \text{OK!}$$

(3)

e)



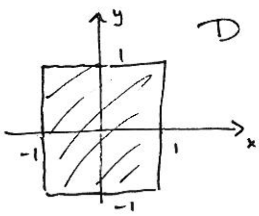
lutning $-\frac{\pi + \sqrt{3}}{3}$

4.3. Bestäm de största och minsta värdena för funktionen

$$f(x,y) = xy + x^2y^2$$

i området $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Lösning: Rita området!



D

f kontinuerlig på kompakt område D

$\Rightarrow$ f_{max} & f_{min} existerar!

Ta fram intressanta punkter:

Stationära punkter:
$$\begin{cases} f'_x = y + 2xy^2 = 0 \\ f'_y = x + 2x^2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1 + 2xy) = 0 & (1) \\ x(1 + 2xy) = 0 & (2) \end{cases}$$

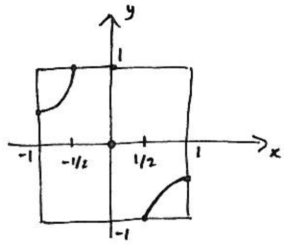
$y = 0$ i (1) ger $x(1 + 2x \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ i (2).

(4)

$1 + 2xy = 0$ i (1) ger att (2) alltid uppfyllt.

$$1 + 2xy = 0 \quad \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad y = -\frac{1}{2x}$$

Stationära punkter $(0,0)$ och alla punkter (x,y) på kurvan $y = -\frac{1}{2x}$ $(-1 \leq x \leq -1/2, 1/2 \leq x \leq 1)$



Randen:

4 delar:

$y = 1, -1 \leq x \leq 1$:

$g_1(t) = f(t, 1) = t \cdot 1 + t^2 \cdot 1^2 = t^2 + t, \quad -1 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow \quad g_1'(t) = 2t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1/2$

intr. punkt $(-1/2, 1)$

$y = -1, -1 \leq x \leq 1$:

$g_2(t) = f(t, -1) = -t + t^2, \quad -1 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow \quad g_2'(t) = -1 + 2t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1/2 \qquad$ intr. pkt. $(1/2, -1)$

$x = 1, -1 \leq y \leq 1$:

$g_3(t) = f(1, t) = t + t^2, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \ldots\ldots$

$\ldots\ldots$ intr. pkt. $(1, -1/2)$

$x = -1, -1 \leq y \leq 1$: $\ldots\ldots$ intr. pkt. $(-1, 1/2)$

"Randen till randen", dvs. hörnen: 5

$(1,1)\,,\,(1,-1)\,,\,(-1,1)\,,\,(-1,-1)$

Beräkna f i de intressanta punkterna:

$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(x, -\frac{1}{2x}\right) = x\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right) + x^2\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(-1/2, 1) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} \quad \text{och p.s.s.}$$

$$f(1/2,-1) = f(1,-1/2) = f(-1,1/2) = -\frac{1}{4}$$

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(1,-1) = f(-1,1) = -1 + 1 = 0$$

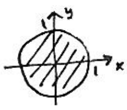
Svar: $f_{max} = 2\,,\; f_{min} = -1/4$

4.11. Beräkna största och minsta värde till

$$f(x,y) = x^2 + x(y^2-1)$$

i området $x^2+y^2 \le 1$.

Lösning: f kont. på kompakt mängd (cirkelskiva) $\Rightarrow$ f_{max} & f_{min} existerar



Stat. punkt. 6

$$\begin{cases} f'_x = 2x + y^2 - 1 = 0 & (1) \\ f'_y = 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

(2): $x = 0$ ger $y^2 - 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ i (1)

$y = 0$ ger $2x - 1 \Leftrightarrow x = 1/2$ i (1)

Stat. pkt. $(0,\pm 1)\,,\,(1/2, 0)$

Alla i området ($(0,\pm1)$ på randen)

Randen: $g(t) = f(\cos t, \sin t) =$

$$= \cos^2 t + \cos t\,\underbrace{(\sin^2 t - 1)}_{=-\cos^2 t} =$$

$$= \cos^2 t - \cos^3 t\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$g'(t) = 2\cos t(-\sin t) - 3\cos^2 t(-\sin t) =$$

$$= \sin t \cos t\,(3\cos t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ \text{eller } \cos t = 0 \\ \text{eller } \cos t = \frac{2}{3} \end{cases} \overset{0 \le t \le 2\pi}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi \\ \text{eller } t = \arccos\frac{2}{3} \\ \text{eller } t = 2\pi - \arccos\frac{2}{3} \end{cases}$$

Intr. punkter $(\pm1, 0)\,,\,(0,\pm1)$ och

$$\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$\pm\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^2}$$

["Rand till rand": $(1,0)$]

Jämför intressanta punkter: 7

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$f(1,0) = 1 - 1 = 0$$

$$f(-1,0) = 1 + 1 = 2$$

$$f(0,\pm1) = 0$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{5}{9} - 1\right)}_{=-\frac{4}{9}} = \frac{4}{27}$$

Svar: $f_{max} = 2\,,\; f_{min} = -1/4$.