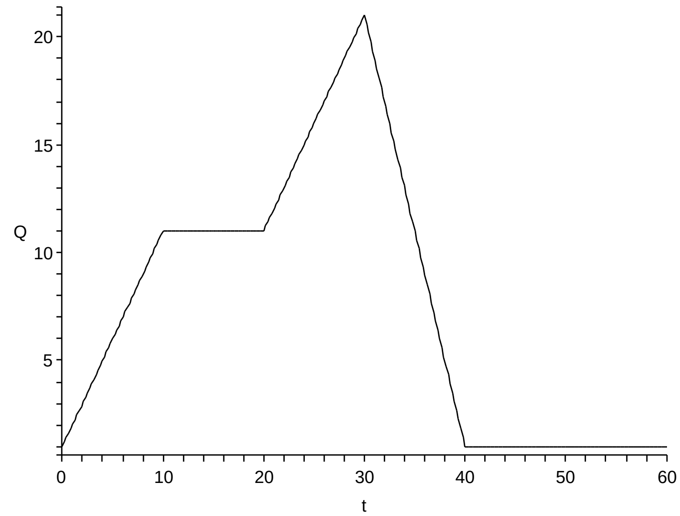
Speciella övningar för V och W

VW 1. Med *vattenföring* menas den volym vatten som rinner fram per tidsenhet i ett vattendrag. Den uttrycks vanligen i m^3/s. En graf som visar hur vattenföringen ändras med tiden t kallas *hydrograf.*

Vattenföringen (här uttryckt i m^3/min) i ett visst vattendrag vid tiden t min betecknas $Q(t)$ och antas ha (hydro)grafen nedan.



Sätt

$$S(x) = \int_0^x Q(t)\,dt\,.$$

a) Ange en formel för $S(x)$, $0 \leq x \leq 60$. Skissera även kurvan $y = S(x)$.

b) Funktionen $Q(t)$ beskriver vattenföringen vid tiden t. Hur kan man med utgångspunkt från detta tolka funktionen $S(x)$?

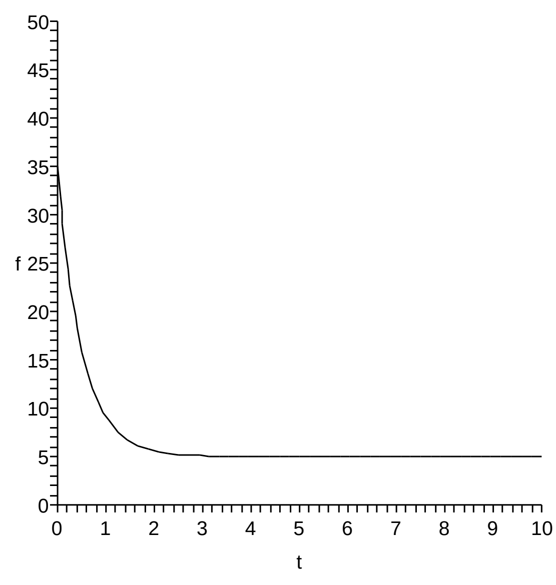
VW 2. När vatten tränger ner i marken kallas det *infiltration.* Horton föreslog 1940 en principiell modell för detta fenomen: *infiltrationskapaciteten* $f(t)$ mm/h (som är ett mått på den hastighet med vilken marken absorberar vattnet) vid tidpunkten t h ges av

$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt},$$

där f_0, f_c och k är positiva konstanter.

a) Bestäm $f(0)$ samt $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

b) Låt $k = 2$ och antag att grafen till f ges av figuren intill (enhet h respektive mm/h). Använd grafen för att utläsa troliga värden för f_0 och f_c.



c) Den *ackumulerade infiltrationen* $S(x)$ mm (dvs det totala vattendjupet som har infiltrerats) vid tiden x h ges av

$$S(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Beräkna $S(x)$ med hjälp av dina avlästa värden på konstanterna.

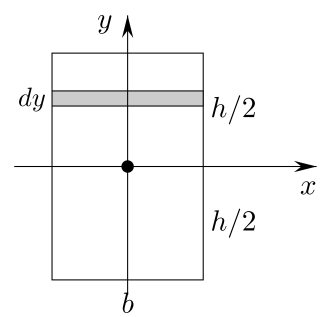
V 3. Genom ett fönster i en rökfylld byggnad strömmar rökgaser ut. Den massa per tidsenhet som passerar på nivån z över golvet är $C\sqrt{z}$, där C är en konstant. Fönstrets underkant är på nivån 1.2 m, dess överkant på 1.8 m. Hur stort är massflödet per tidsenhet genom fönstret?

V 4. Utböjningen hos en belastad balk beror bl.a. på tvärsnittets form. Den storhet hos ett tvärsnitt som är av intresse kallas *yttröghetsmoment* och definieras av

$$I_x = \int y^2\,dA,$$

där integrationen (summationen) sker över tvärsnittet ifråga. (Här ska x-axeln gå genom tvärsnittets tyngdpunkt.)

Uppgift: Bestäm I_x för ett rektangulärt tvärsnitt enligt figuren.



W 5. Vattentrycket $p(H)$ Pa på djupet H m i havsvatten kan beräknas med hjälp av integralen

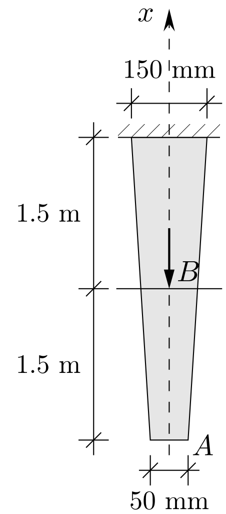
$$p(H) = \int_0^H \gamma(h)\,dh,$$

där $\gamma(h)$ anger havsvattnets *tyngddensitet* (i enheten N/m^3) vid djup h m. (Vi bortser här från det atmosfäriska trycket.) Havsvattnets tyngddensitet ges ungefärligen av den empiriska formeln

$$\gamma(h) = \gamma_0 + K\sqrt{h},$$

där $\gamma_0 = 10^4$ N/m^3 och $K = 7$ $\text{N/m}^{7/2}$. Beräkna vattentrycket på djupet 3600 m.

V 6. Figuren visar ett tvärsnitt av en avsmalnande stång i form av en stympad likbent triangel, utskuren ur en 25 mm tjock stålplatta. Den är upptill fastsvetsad i en styv konstruktion. I punkten B verkar en nedåtriktad kraft på 40 kN. Beräkna förskjutningen i punkten A orsakad av denna kraft.



För förskjutningen δ gäller formeln

$$\delta = \int \frac{N(x)}{A(x)E(x)}\,dx$$

där $E(x)$ (*elasticitetsmodulen*) beror av materialet och i detta fall har det konstanta värdet 200 GPa. $N(x)$ betyder normalkraften på nivån x, i detta fall alltså 40 kN ovanför B och noll under. Slutligen betecknar $A(x)$ stångens tvärsnittsarea på nivån x.

Tips för enkla beräkningar: välj x-axelns nollpunkt i skärningspunkten av triangelns två lika sidor.

V 7. Vid experiment med asfalt är man intresserad av storheten ε^R (*pseudostrain*). Denna storhet är en funktion av tiden t och beräknas för $t > 0$ ur en formel med utseendet

$$\varepsilon^R(t) = \int_0^t E(t-x)g'(x)\,dx.$$

I ett visst experiment är

$$g(x) = nx$$

där n är en given positiv konstant. Vidare är

$$E(y) = E_\infty + \sum_{k=1}^{N} E_k e^{-y/\rho_k},$$

där N är ett givet positivt heltal och E_∞, $E_1, \dots, E_N$, $\rho_1, \dots, \rho_N$ är givna positiva konstanter. (En sådan funktion $E(y)$ kallas en *Pronyserie*.)

Beräkna för detta experiment $\varepsilon^R(t)$ uttryckt i tiden t och de givna konstanterna.

W 8. Betrakta en viss fiskart, som i ett visst område finns i y (tusental) exemplar vid tid t. Dess tillväxthastighet om det inte förekom något fiske antas vara $y - k^2y^2$, där k är en (liten) konstant och där den sista termen kan motiveras av konkurrens om föda mellan fiskarna. Fiskarna antas fångas med nät, på sådant sätt att en viss andel α av populationen försvinner. För fiskpopulationen får vi då följande differentialekvation:

$$y' = y - k^2y^2 - \alpha y.$$

Beteckna med y_0 (>0) populationens storlek vid tiden $t = 0$.

a) Inför en ny obekant $z = \dfrac{1}{y}$ i denna ekvation. Visa att den resulterande ekvationen i z blir

$$z' + (1-\alpha)z = k^2.$$

b) Bestäm $z = z(t)$ och därefter y.

c) Vad händer med fiskpopulationen efter långt tid? (Kommer utfiskningen att leda till att den försvinner helt, kommer den att växa obegränsat, ... ?)

W 9. Mängden koldioxid i atmosfären anses ha betydelse för global uppvärmning. Denna mängd växer bland annat på grund av industriell förbränning av fossila bränslen. Den minskar på grund av naturlig absorption av oceanerna och gröna växter. Vi ska studera en enkel modell av förändringen av mängden koldioxid i atmosfären med tiden.

Låt $y(t)$ beteckna mängden koldioxid. Antag att den tillväxer med en hastighet

$$y' = x - \alpha y,$$

där x betecknar de industriella utsläppen och $\alpha > 0$ anger proportionen av absorption av koldioxid i naturen. Antag vidare att de industriella utsläppen varierar med hastigheten

$$x' = ae^{bt} - cy,$$

där a, b, c är positiva konstanter. Den första termen representerar effekter pga ekonomisk aktivitet i industrin. Den andra termen, som verkar för att minska utsläppen, representerar statliga och överstatliga beslut om kontroll av utsläppen när koldioxidmängden ökar.

a) Visa att dessa villkor leder till en differentialekvation av andra ordningen för y, nämligen

$$y'' + \alpha y' + cy = ae^{bt}.$$

b) Finn den allmänna lösningen till denna differentialekvation.

c) Ge villkor på konstanterna a, b, c som leder till att $y(t) \not\to \infty$ då $t \to \infty$.

W 10. I en viss stad bor 100 000 människor. Befolkningsökningen är varje år 0.1% på grund av födelser och dödsfall. Varje år är nettoutflyttningen 500 personer.

Gör en matematisk modell för befolkningsutvecklingen i form av en differentialekvation. Ange med hjälp av denna modell folkmängden som funktion av tiden. Hur länge dröjer det, enligt denna modell, tills folkmängden minskat med 10 000 människor. Svara exakt och approximativt.

V 11. Betrakta en 2 dm tjock vägg, vars ena sida har temperaturen 20° och vars andra sidan har temperaturen 300°. Vi antar att temperaturen u inne i väggen bara beror på avståndet till sidorna, så att vi har ett endimensionellt problem. Man kan visa att när stationärt tillstånd inträffat så uppfyller u villkoret

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

Bestäm $u(x)$.

V 12. En tunn stålplatta (oändligt stor) utgör vägg mellan två områden, som båda har temperaturen 20°, liksom väggen själv. Vid tiden $t = 0$ blir temperaturen på den vänstra sidan plötsligt 100°, och behåller denna temperatur i fortsättningen. Hur kommer plattans temperatur T att variera med tiden? Rita kurvan.

Newtons avsvalningslag innebär i denna situation att

$$\frac{dT}{dt} = k\Big((T_1 - T) - (T - T_2)\Big).$$

Här betecknar T_1 och T_2 temperaturen på respektive sida om väggen, och k är en materialkonstant som beror på stålets densitet, specifika värme, tjocklek och värmeövergångskoefficient till luft.

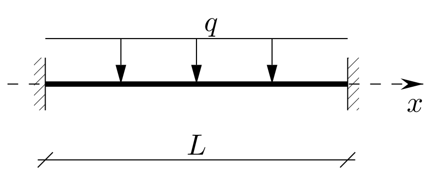
V 13. Sambandet mellan lasten $q(x)$ på en balk utsträckt längs x-axeln mellan 0 och L och dess utböjning $v(x)$ ges av

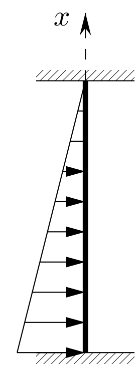
$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{1}{EI}\,q(x), \qquad 0 \le x \le L,$$

där E har att göra med materialegenskaperna hos balken och I beror på formen av balkens tvärsnitt. Dessa tal antas konstanta här. Vi betraktar bara fast inspända balkar, för vilka gäller

$$v(0) = v'(0) = 0, \qquad v(L) = v'(L) = 0.$$

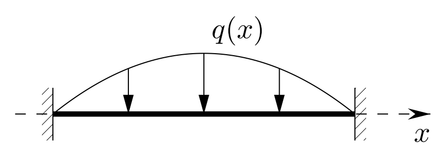
a) Bestäm $v(x)$ för en balk med jämnt utbredd last: $q(x) = q$ för $0 < x < L$.





b) En balk i en undervattenskonstruktion utsätts för last orsakad av vattentrycket. Då är $q(x) = kx$ för någon konstant k. Bestäm $v(x)$.

V 14. En 6 m lång balk bär en spannmålslast längs hela sin längd. Lasten kan beskrivas med ett andragradsuttryck $q(x) = ax^2 + bx + c$, där a, b, c är konstanter. Lasten är noll vid balkens ändar och dess största värde är 4 kN/m. Bestäm balkens utböjning $v(x)$. För denna gäller differentialekvationen



$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{1}{EI}\,q(x), \qquad 0 \le x \le 6,$$

med randvillkoren $v(0) = v'(0) = v(6) = v'(6) = 0$. Material- och tvärsnittskonstanterna har värdena $E = 208$ GPa och $I = 1.0 \cdot 10^{-4}$ m^4.

W 15. En fabrik släppte under 40 års tid ut förorening i marken med den konstanta hastigheten 3 ton per år. Samtidigt avdunstade föroreningen med en hastighet som i varje ögonblick var proportionell mot den mängd förorening som fanns i marken. Mätningar visade att avdunstningen var 5% år^{-1}.

Hur stor mängd förorening fanns enligt denna modell i marken då utsläppen upphörde? Vi förutsätter att inga föroreningar fanns då utsläppen började.

W 16. Förhållandet mellan inflöde $Q_{\text{in}}(t)$, utflöde $Q_{\text{ut}}(t)$ och vattennivån $z = z(t)$ hos en sjö vid en given tidpunkt t kan beskrivas med differentialekvationen

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{ut}}(t)}{A(z)},$$

där $A(z)$ betecknar sjöns ytarea vid vattennivån z.

a) För en viss sjö, som utsätts för ett konstant inflöde av vatten, gäller att sjöns ytarea är direkt proportionell mot vattennivån. Samtidigt sker det en förlust genom avdunstning (dvs ett utflöde) som är direkt proportionell mot sjöns ytarea. Visa att differentialekvationen då kan förenklas till

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C_1 - C_2 z}{z},$$

där C_1 och C_2 är positiva konstanter.

b) För vilka vattennivåer z i sjön kommer vattennivån att öka och för vilka kommer den att minska enligt denna modell?

W 17. Det atmosfäriska trycket p millibar uttryckt som en funktion av höjden h km över havsnivån uppfyller differentialekvationen

$$\frac{dp}{dh} = -kp,$$

där k är en konstant. En dag är $p(0) = 1013$ millibar (normalt tryck vid havsnivå) och en mätning visar att $p(5) = 650$ millibar. Bestäm det atmosfäriska trycket på 10000 meters höjd.

W 18. I början av 1980-talet, innan Montrealprotokollet begränsade produktionen av freoner på grund av deras effekt på ozonlagret, var det globala utsläppet av freonen CFC-12 (CF_2Cl_2) i atmosfären $4.2 \cdot 10^8$ kg/år. Denna gas avlägsnas från atmosfären enbart genom s.k. *fotolys* (nedbrytning med hjälp av fotoner), med en hastighet som i varje ögonblick är proportionell mot massan CFC-12 i atmosfären (proportionalitetskonstant $k = 0.01$ år^{-1}).

a) Ställ upp en differentialekvation för massan CFC-12 i atmosfären som en funktion av tiden. (Vi antar att det årliga utsläppet av CFC-12 är konstant.)

b) År 1980 uppmättes massan CFC-12 i atmosfären till $8.5 \cdot 10^9$ kg. Hur mycket CFC-12 fanns det, enligt modellen ovan, fyra år senare?