LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2009–01–07 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. a) Lös ekvationen $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$. (0.5)

b) Lös ekvationen $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$. (0.4)

c) Vad menas med att *två ekvationer är ekvivalenta*? (0.1)

2. a) Beräkna binomialkoefficienterna $\binom{8}{6}$ och $\binom{n+1}{n-1}$. (0.4)

b) Beräkna $f'(x)$ för funktionen $f(x) = \ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)$.
Förenkla sedan $f'(x)$ så långt som möjligt!
Beräkna slutligen även f''. (0.6)

3. a) Rita grafen till funktionen

$$f(x) = x \ln x, \qquad x > 0.$$

Ange eventuella lokala extrempunkter. (0.8)

b) Är funktionen

$$g(x) = |x| \ln |x|, \qquad x \neq 0,$$

jämn eller udda? Skissera, utgående från ditt resultat i a), grafen till g. (0.2)

4. a) Definiera begreppen *växande* och *strängt växande funktion*. (0.2)

b) Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall I har en derivata som är positiv så är funktionen strängt växande. (0.3)

c) Vilka eventuella implikationer gäller mellan följande påståenden?

A: $f'(x) > 0$ för $x \in \mathbb{R}$ B: f är deriverbar och strängt växande i $\mathbb{R}$.

C: $f(x) = x^3$ D: $f'(x) \geq 0$ för $x \in \mathbb{R}$

Motivera ordentligt! (0.5)

5. a) Beräkna arean av en liksidig triangel med sidolängd 3 cm. (0.3)

b) Fyrhörningen $ABCD$ är inskriven i en cirkel med radie r.
Bestäm $\angle D$ om $AB = BC = r$. (0.7)

6. a) Betrakta funktionen

$$y(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 3x.$$

Vilken är funktionskurvans största, respektive minsta, lutning i intervallet $[0, 2]$? (0.5)

b) Visa att funktionen

$$h(x) = \ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right) + x - 2, \qquad x \geq 1,$$

har minst ett nollställe. Hur många nollställen finns det? (0.5)

LYCKA TILL!

ENDIMENSIONELL ANALYS DELKURS B1 2009-01-07

1. a) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow$
$\cos x = 0$ eller $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Svar: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ eller $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ eller $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $(3^x)^2 + 2\cdot 3^x - 3 = 0$, variabelbytet $u = 3^x$ ger $u = 1$ eller $u = -3$.

Svar: $x = 0$ ($u = -3$ ger ingen lösning!!)

c) **Svar:** *Två ekvationer är ekvivalenta* om de har samma lösningsmängd.

2. a) **Svar:** $\binom{8}{6} = 28$ och $\binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)n}{2}$

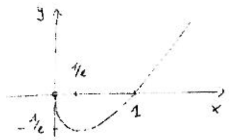
b) $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$$
$$f''(x) = -\frac{x}{2(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

3. a) $f'(x) = \ln x + 1$

		$\frac{1}{e}$	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

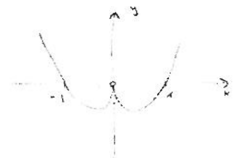
$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$, $\lim_{x\to\infty} x\ln x = \infty$

Min$(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$, inget maximum



b) $g(-x) = |-x|\ln|-x| = |x|\ln|x| = g(x)$.

Svar: jämn



spegling!

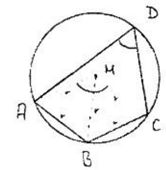
4. a) Se analysboken, sida 94.

b) Se analysboken, Sats 16 på sidan 206.

c) $A \Longrightarrow B$ (enligt bevis i 4b)
$B \Longrightarrow D$ ($f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ eftersom $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ för varje h.)
$A \Longrightarrow D$
$C \Longrightarrow B$ och $C \Longrightarrow D$ ($f(x) = x^3$ är strängt växande och $f'(x) = 3x^2 \geq 0$)
Inga andra implikationer gäller! ($f(x) = x^3$ duger som motexempel att $B \not\Longrightarrow A$)

5. a) $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm
Svar: $A = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2

b)



Trianglarna ΔABM och ΔBCM är båda liksidiga, därför är vinkeln $\angle CMA = 60° + 60° = 120°$. Enligt randvinkelsatsen följer $\angle D = 60°$.

Svar: $\angle D = 60°$

6. a) **Svar:** 3 och 13 är minsta, respektive största, värde av $y'(x)$ i intervallet $[0, 2]$.

b) Eftersom den kontinuerliga funktionen h antar både negativa och positiva värden ($h(1) = \ln\sqrt{2} - 1 < 0$ och $\lim_{x\to\infty} h(x) = +\infty$) antar h även värdet 0, dvs. det finns minst ett nollställe.
$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} + 1 > 0$. Funktionen är alltså strängt växande och därför finns det **precis ett** nollställe.

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2007-10-15 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. a) Lös ekvationen $3x + |x-1| = 2$. (0.3)

b) Ange koefficienten för x^7-termen i utvecklingen av $(x - \frac{1}{2})^{10}$. (0.3)

c) Formulera och bevisa faktorsatsen för polynom. (0.4)

2. a) Lös ekvationen $\sin 2x - \sin x = 0$. (0.3)

b) Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x + \arcsin x}$. (0.3)

c) Sätt $f(x) = \sin^2(x-1) + \arctan x$. Låt t vara tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan, vars x-koordinat är 1. Bestäm t:s skärning med y-axeln. (0.4)

3. a) Bevisa, utgående från räkneregler för potenser, att $\ln ab = \ln a + \ln b$. (0.5)

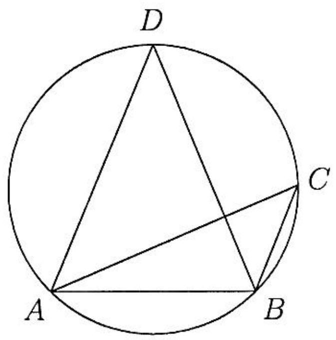
b) Ange alla implikationer/ekvivalenser mellan utsagorna

A: $x = \ln e$ B: $\ln(x^2) = 0$ C: $\ln(x^3) = 0$ (0.5)

4. Sätt $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$. Rita grafen till f i stora drag och ange alla eventuella sneda asymptoter.

5. Fyra punkter A, B, C och D ligger på en cirkel med radien 1 dm. Se figuren! Sträckorna AD och BD är lika långa. Vidare är vinkeln BAC 35^o och vinkeln ABC 100^o.

Beräkna först vinklarna och sedan sidorna i triangeln ABD. I svaret får inga trigonometriska uttryck ingå.



6. Räcker 11 m stängsel till att inhägna en rastgård i form av en cirkelsektor med arean 9 m^2?

LYCKA TILL!

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2007-10-15

1. a) Om $x \geq 1$ är ekvationen ekvivalent med $3x + x - 1 = 2$, som har lösningen $x = \frac{3}{4}$. Detta x uppfyller inte villkoret $x \geq 1$ och är alltså inte en lösning. Om $x < 1$ är ekvationen ekvivalent med $3x - (x - 1) = 2$, som har lösningen $x = \frac{1}{2}$. Detta x uppfyller kravet $x < 1$ och är alltså en lösning.
Svar: $x = \frac{1}{2}$

b) Den sökta termen är $\binom{10}{7} x^7 (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8} x^7 = -15x^7$.

Svar: Koefficienten är -15.

c) Se boken s.52

2. a) Ekvationen är ekvivalent med

$$\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow 2x = \begin{cases} x + 2n\pi \\ \pi - x + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2n\pi \\ 3x = \pi + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2n\pi \\ \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3} \end{cases}$$

Svar: $x = \begin{cases} 2n\pi \\ \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3} \end{cases}$, där n är ett godtyckligt heltal

b) Sätt $\arcsin x = t$. Då är $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Vidare är $x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$. Vi får $\frac{x}{x + \arcsin x} = \frac{\sin t}{\sin t + t} = \frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\sin t}{t} + 1} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, då $t \to 0$, dvs då $x \to 0$.

Svar: $\frac{1}{2}$

c) Om $x = 1$, är $y = f(x) = \sin^2 0 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Tangeringspunkten är alltså $P : (1, \frac{\pi}{4})$. Tangentens riktningskoefficient är $k = f'(1)$. Derivering ger $f'(x) = 2\sin(x-1)\cos(x-1) + \frac{1}{1+x^2}$. Det ger $f'(1) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. En ekvation för tangenten är alltså $y = \frac{1}{2}x + m$. Insättning av P:s koordinater ger $m = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.
Svar: Skärningen med y-axeln är $(0, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$

3. a) *Påstående:* $\ln ab = \ln a + \ln b$
Bevis: För vänster och höger led i påståendet gäller
$e^{\text{vänster led}} = e^{\ln ab} = ab$
$e^{\text{höger led}} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = ab$
Alltså är $e^{\text{vänster led}} = e^{\text{höger led}}$, vilket ger att vänster led = höger led, och beviset är klart.

b) $A \Leftrightarrow x = 1$, $B \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ och $C \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
Svar: $A \Leftrightarrow C$, $A \Rightarrow B$ och $C \Rightarrow B$.

4. *Derivering:*
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-3) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2-3)^2} = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller ± 3

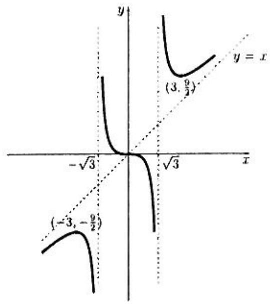
Teckentabell:

x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	+	0	−	$\wr$	−	0	−	$\wr$	−	0	+
$f(x)$	↗	$-\frac{9}{2}$	↘	$\wr$	↘	0	↘	$\wr$	↘	$\frac{9}{2}$	↗

Gränsvärden:
$f(x) \to -\infty$, då $x \to -\sqrt{3}^-$
$f(x) \to \infty$, då $x \to -\sqrt{3}^+$
$f(x) \to -\infty$, då $x \to \sqrt{3}^-$
$f(x) \to \infty$, då $x \to \sqrt{3}^+$

Asymptoter:
Polynomdivision ger $f(x) = x + \frac{3x}{x^2-3} = x + \frac{\frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x^2}}$. Den andra termen går mot noll då $x \to \pm\infty$. Alltså är $y = x$ en asymptot då $x \to \pm\infty$.

Kurvan:



Svar: Graf: se ovan!
Asymptot: $y = x$, då $x \to \pm\infty$.

5. Eftersom vinkelsumman i en triangel är 180°, är $\angle BCA = 180^\circ - 35^\circ - 100^\circ = 45^\circ$. Enligt en följdsats till randvinkelsatsen är även $\angle ADB = 45^\circ$, ty de båda vinklarna står på samma båge. Då är de båda basvinklarna i den likbenta triangeln $\triangle ABD$ hälften av $180^\circ - 45^\circ$, dvs 67.5°. Det finns nu många sätt att beräkna sidornas längder. Låt x vara längden av AD och y vara längden av AB. Låt O vara cirkelns medelpunkt och dra radierna OA, OB och OD. Trianglarna AOD och BOD är kongruenta enligt fallet SSS. Alltså är $\angle ADO = \angle ODB = 22.5^\circ$. Eftersom $\triangle AOD$ är likbent, är även $\angle OAD = 22.5^\circ$. Det ger att $\angle AOD = 135^\circ$. Cosinussatsen på $\triangle AOD$ ger

$$x^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 135^\circ = 2 - 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Enligt randvinkelsatsen är $\angle AOB$ rät. Pythagoras' sats ger då $y = \sqrt{2}$.
Svar: Vinklarna är 45°, 67.5° och 67.5°.
Sidorna är $\sqrt{2}$ dm, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ dm och $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ dm.

6. Vi bestämmer först den minsta omkrets en cirkelsektor kan ha, om dess area ska vara 9 m^2. Kalla sektorns radie r m och dess medelpunktsvinkel α. Då är bågens längd αr m och sektorns area (i m^2)

$$9 = \frac{\alpha r \cdot r}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{18}{r^2}$$

Omkretsen är $P = 2r + \alpha r = 2r + \frac{18}{r^2} r = 2r + \frac{18}{r}$, $r > 0$.
$P' = 2 - \frac{18}{r^2} = \frac{2r^2 - 18}{r^2} = \frac{2(r^2 - 9)}{r^2}$
$P' = 0 \Leftrightarrow r = 3$.
Teckentabell:

r	0		3	
P'		−	0	+
P		↘	12	↗

Omkretsens minsta värde är tydligen 12 m. Då räcker inte 11 m stängsel.
Svar: Nej.

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2008–10–24 kl 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. Lös ekvationerna

a) $\sin 2x = \sqrt{2}\sin x$, (0.5)

b) $(\ln(x))^2 - \ln(x^3) + \frac{5}{4} = 0$. (0.5)

2. Rita grafen till funktionen
$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x+4}.$$
Ange särskilt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

3. Beräkna gränsvärdena

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-x} + x\ln x}{x^2+1}$, (0.3)

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$, (0.3)

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 4^{-k}$. (0.4)

4. a) Skriv ner definitionen av att en funktion f är kontinuerlig i punkten a. (0.2)

b) Skriv ner definitionen av att en funktion f är deriverbar i punkten a. (0.2)

c) Vilka eventuella implikationer gäller mellan de två påståendena:

A: f är kontinuerlig i a B: f är deriverbar i a.

En implikation åt något håll ska motiveras med ett bevis. En avsaknad av implikation åt något håll ska styrkas med ett väl motiverat motexempel. (0.6)

5. a) Rita grafen till funktionen
$$f(x) = |x-3| + |x-1| + x.$$
Ange även värdemängden till funktionen. (0.5)

b) Avgör vad för slags kurva i planet som ges av ekvationen
$$x^2 + 4x + 9y^2 - 18y + 4 = 0,$$
och rita därefter ut den. (0.5)

6. En rätvinklig triangel har hörn i punkterna $(a, 0)$, $(0, b)$ och origo. Hypotenusan går dessutom genom punkten $(1, 2)$. Hur ska talen a och b väljas så att längden av hypotenusan blir så liten som möjligt?

LYCKA TILL!

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1 - 2008-10-24, 8-13

1. a) Genom att utnyttja den trigonometriska formeln $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ kan vi lösa ekvationen på följande sätt:

$$\sin 2x = \sqrt{2}\sin x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos x = \sqrt{2}\sin x \quad\Leftrightarrow$$

$$\sin x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x = 0 \quad\text{eller}\quad 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\sin x = 0 \quad\text{eller}\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow$$

$$x = \pi k \quad\text{eller}\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \text{ heltal}$$

Svar: $x = \pi k$ eller $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, k heltal.

b) Med hjälp av lämplig logaritmlag får vi

$$(\ln(x))^2 - \ln(x^3) + \frac{5}{4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\ln(x))^2 - 3\ln(x) + \frac{5}{4} = 0.$$

Den högra ekvationen är en andragradsekvation i $\ln x$, som vi kan lösa på vanligt sätt. Detta syns tydligare om vi sätter $y = \ln x$:

$$y^2 - 3y + \frac{5}{4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{1}{2} \quad\text{eller}\quad y = \frac{5}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \quad\text{eller}\quad \ln x = \frac{5}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = e^{\frac{1}{2}} \quad\text{eller}\quad x = e^{\frac{5}{2}}.$$

Svar: $x = e^{\frac{1}{2}}$ eller $x = e^{\frac{5}{2}}$.

2. Vi börjar med att observera att funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$$

är definierad för alla $x \neq -4$. Derivatan ges av

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+4) - 1\cdot(x^2+3x)}{(x+4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 12}{(x+4)^2}, \quad x \neq -4,$$

och

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + 8x + 12 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -6 \quad\text{eller}\quad x = -2.$$

Med hjälp av faktorsatsen kan vi skriva derivatan

$$f'(x) = \frac{(x+6)(x+2)}{(x+4)^2}, \quad x \neq -4,$$

och det återstår nu att studera tecknet av denna:

		-6		-4		-2	
$x+6$	-	0	+	+	+	+	+
$x+2$	-	-	-	-	-	0	+
$(x+4)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Från teckenschemat ser vi att $x = -6$ är en lokal maximipunkt och $x = -2$ en lokal minimipunkt.

Vi övergår nu till att bestämma eventuella gränsvärden och asymptoter. Med hjälp av polynomdivision får vi

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+4},$$

vilket innebär att

$$f(x) - (x - 1) = \frac{4}{x+4} \to 0 \quad\text{då } x \to \pm\infty$$

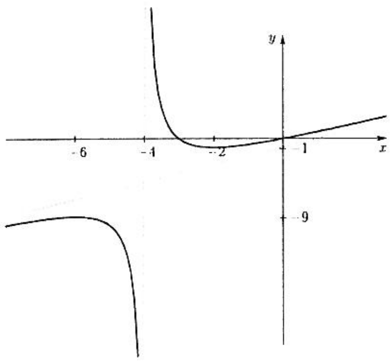
Av det drar vi slutsatsen att linjen $y = x - 1$ är asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$. (Det följer nu automatiskt att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$, så detta behöver inte bestämmas separat.)

Därefter studerar vi funktionens beteende nära $x = -4$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+4} \to \text{“}\frac{(-4)^2 + 3(-4)}{-4^+ + 4}\text{”} = \text{“}\frac{4}{0^+}\text{”} = \infty \quad\text{då } x \to -4^+,$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+4} \to \text{“}\frac{(-4)^2 + 3(-4)}{-4^- + 4}\text{”} = \text{“}\frac{4}{0^-}\text{”} = -\infty \quad\text{då } x \to -4^-.$$

Vi kan nu skissera grafen till f:



Svar: Lokal maximipunkt $x = -6$, lokal minimipunkt $x = -2$ och asymptot $y = x - 1$ då $x \to \pm\infty$.

3. a) Detta gränsvärde kan vi beräkna genom att först bryta ut nämnarens dominerande term, dvs. x^2, ur både täljare och nämnare:

$$\frac{xe^{-x} + x\ln x}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\frac{1}{xe^x} + \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{xe^x} + \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0 \quad\text{då } x \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet är 0.

b) Genom ett antal omskrivningar kan vi tillämpa ett par olika standardgränsvärden:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = e^{-x}\cdot\frac{e^{2x} - 1}{\sin x} = e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 2 =$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot 2 \to e^0\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 2 = 2 \quad\text{då } x \to 0.$$

Svar: Gränsvärdet är 2.

c) Vi bestämmer först ett uttryck för den geometriska summan:

$$\sum_{k=1}^{n} 4^{-k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1}.$$

Eftersom $-1 < \frac{1}{4} < 1$ följer det att $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$ då $n \to \infty$, varför

$$\sum_{k=1}^{n} 4^{-k} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} \to \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{3} \quad\text{då } n \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet är $\frac{1}{3}$.

4. a) Funktionen f är kontinuerlig i a om $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$ (eller ekvivalent $f(a+h) \to f(a)$ då $h \to 0$).

b) Funktionen f är deriverbar i a om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar. (Detta gränsvärde betecknas då $f'(a)$.)

c) Om f är deriverbar i a, så följer det att f är kontinuerlig i a. Detta kan bevisas på följande sätt.

Antag att f är deriverbar i a, dvs. att gränsvärdet

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar. Från detta kan vi dra slutsatsen att

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\cdot h \to f'(a)\cdot 0 = 0 \quad\text{då } h \to 0,$$

vilket betyder att $f(a+h) \to f(a)$ då $h \to 0$ och att f är kontinuerlig i a.

Omvändningen gäller däremot inte, vilket kan inses genom att betrakta funktionen $f(x) = |x|$. Denna funktion är kontinuerlig i 0 eftersom $|x| \to 0$ då $x \to 0$, men den är ej deriverbar där eftersom högerderivata och vänsterderivata i 0 är olika:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.$$

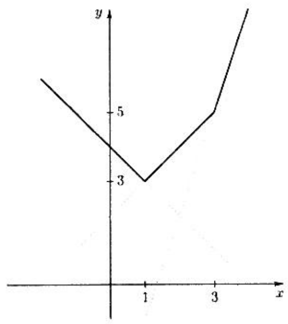
För att en funktion ska vara deriverbar i en punkt krävs att tillhörande ensidiga derivator ska existera och dessutom *vara lika*, vilket inte är fallet ovan.

5. a) Eftersom $x - 1$ och $x - 3$ byter tecken kring $x = 1$ respektive $x = 3$, betraktar vi $f(x)$ i tillhörande tre delintervall:

$$f(x) = |x - 3| + |x - 1| + x =$$

$$= \begin{cases} (x-3) + (x-1) + x &= 3x - 4 \quad \text{då } x \geq 3 \\ -(x-3) + (x-1) + x &= x + 2 \quad \text{då } 1 \leq x < 3 \\ -(x-3) - (x-1) + x &= -x + 4 \quad \text{då } x < 1 \end{cases}$$

I varje delintervall motsvarar grafen en linje, varför vi direkt kan skissera grafen:



Här kan vi direkt läsa av värdemängden till f, nämligen $V_f = [3, \infty[$.

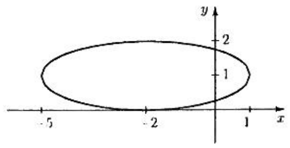
b) Vi börjar med att kvadratkomplettera vänsterledet med avseende på x respektive y (och för att göra räkningarna lite enklare bryter vi först ut faktorn 9 från y-termerna):

$$x^2 + 4x + 9y^2 - 18y + 4 = (x+2)^2 - 2^2 + 9(y^2 - 2y) + 4 =$$
$$= (x+2)^2 + 9((y-1)^2 - 1^2) = (x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 9.$$

Ekvationen i uppgiften kan nu skrivas

$$x^2 + 4x + 9y^2 - 18y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{1^2} = 1,$$

och vi ser att detta beskriver en ellips med medelpunkt $(-2, 1)$ och halvaxlarna 3 respektive 1.



6. Vi observerar först att för att triangeln överhuvudtaget ska kunna konstrueras krävs att $a > 1$ och $b > 2$.

Linjen l som går genom punkterna $(a, 0)$ och $(0, b)$ har riktningskoefficient $-b/a$ och går genom punkten $(1, 2)$, så ekvationen för l ges av

$$y - 2 = -\frac{b}{a}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{b}{a}x + 2 + \frac{b}{a}.$$

Nu ser vi att l skär y-axeln i punkten $(0, 2 + \frac{b}{a})$, och således får vi

$$b = 2 + \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad ab = 2a + b \quad \Leftrightarrow \quad a(b-2) = b \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{b}{b-2}.$$

(Detta samband kan också fås fram genom att studera likformiga trianglar.)

Pythagoras sats ger nu att hypotenusans längd d ges av

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{b^2}{(b-2)^2} + b^2}, \quad b > 2,$$

och det är denna längd vi ska minimera. Då roten av ett tal är en växande funktion inser vi att det räcker att minimera funktionen

$$f(b) = \frac{b^2}{(b-2)^2} + b^2, \quad b > 2.$$

Deriverar vi får vi

$$f'(b) = \frac{2b(b-2)^2 - 2(b-2)b^2}{(b-2)^4} + 2b = \frac{2b(b-2) - 2b^2}{(b-2)^3} + 2b =$$
$$\frac{-4b}{(b-2)^3} + 2b = 2b\left(1 - \frac{2}{(b-2)^3}\right) = 2b \cdot \frac{(b-2)^3 - 2}{(b-2)^3}.$$

Vi ser nu att

$$f'(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ eller } (b-2)^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \text{ eller } b = 2 + 2^{1/3}.$$

Punkten $b = 0$ ligger utanför vårt intervall och är ej intressant. Då $(b-2)^3$ är strängt växande kan vi skriva upp ett teckenschema direkt:

	2		$2 + 2^{1/3}$	
$f'(b)$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(b)$	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$

Av detta följer att f antar sitt minsta värde för $b = 2 + 2^{1/3}$. Vi får då att

$$a = \frac{b}{b-2} = \frac{2 + 2^{1/3}}{2 + 2^{1/3} - 2} = \frac{2 + 2^{1/3}}{2^{1/3}} = 1 + 2^{2/3}.$$

Svar: $a = 1 + 2^{2/3}$ och $b = 2 + 2^{1/3}$.

LUNDS UNIVERSITET
Lunds Tekniska Högskola

Matematikcentrum
Matematik LTH

september 2010

Fördelning av lokaler vid skrivningar i MATEMATIK oktober 2010

Endim analys, delkurs B1, fredagen den 22 oktober 8–13

F	MA 9
Pi	MA 9
E	MA 8
I	MA 10
L	Gasque
V	MA 10
W	Gasque

MATEMATIK

Frågetimmar inför skrivningarna i oktober

(Tomas Carnstam, Johan Richter, ...)

- fredag 15 oktober 15.15–17 (**Obs**) — Lokal: MH:228 OBS!
- måndag 18 oktober 13.15–15 — Lokal: MH:228 OBS!
- onsdag 20 oktober 13.15–15 — Lokal: MH:228 OBS!
- torsdag 21 oktober 10.15–12 (**Obs**) — Lokal: MH:228 OBS!
- fredag 22 oktober 13.15–15 — Lokal: MH:228 OBS!

Individuell rådgivning på alla aktuella kurser.

AH