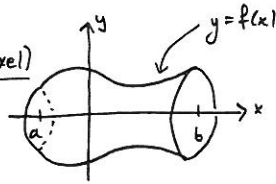


Föreläsning 8

①

Volym av rotations kropp (x-axel)

$$V_{\text{olym}} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

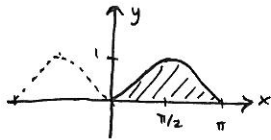


Rotationsvolymen kring y-axeln:

För rotationer kring y-axeln kan man antingen byta roll på x och y (dvs. först bestämma inversen) och göra som ovan, eller använda sig av "rörformeln".

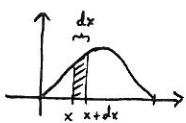
Ex: Låt området mellan x-axeln och $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, rotera kring y-axeln. Bestäm volymen.

Vi får $dV \approx 2\pi x \cdot dx \cdot y$
 $= 2\pi x \cdot \sin x \cdot dx$ då dx litet

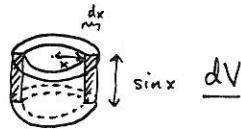


Volym = $\int_0^\pi dV =$

$= 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi [-x \cos x]_0^\pi +$



$+ 2\pi \int_0^\pi \cos x dx = 2\pi^2 + 2\pi [\sin x]_0^\pi =$
 $= 2\pi^2$ v.e.



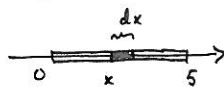
$= \frac{\pi}{9} (1200 - 450) = \frac{250}{3} \pi$ kg

③

Massa av en tråd/en plan skiva

Samma resonemang som ovan, men vi använder längdensitet (kg/m) respektive areadensitet (kg/m²).

Ex: En 5 m lång tråd placeras på tallinjen (mellan 0 och 5).



Densiteten (i kg/m) ges av

$\rho(x) = 2 + \frac{1}{x+1}$. Bestäm massan!

En liten trådbit vid x har massan

$dm = \rho(x) \cdot dx = (2 + \frac{1}{x+1}) dx$.

Totalmassan blir då

$m = \int_0^5 dm = \int_0^5 (2 + \frac{1}{x+1}) dx =$

$= [2x + \ln|x+1|]_0^5 = 10 + \ln 6$ kg

Massa:

②

För beräkning av massa gäller sambandet

$$m = \rho \cdot V$$

där m är massa (kg), ρ är densitet (kg/m³) och V är volym (m³). Observera dock att detta förutsätter att ρ är konstant!

- Vad händer då ρ varierar?

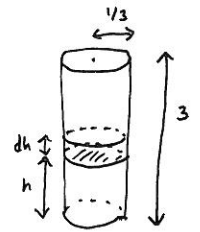
Ex: En cylindrisk behållare med radien 1/3 m och höjden 3 m är fylld med ett material.

Densiteten varierar via sambandet

$\rho(h) = 400 - 100h$ (kg/m³)

För en tunn skiva gäller

$dV = \pi (1/3)^2 \cdot dh = \frac{\pi}{9} dh$



$\Rightarrow dm = \rho(h) \cdot dV = (400 - 100h) \cdot \frac{\pi}{9} dh$

eftersom $\rho(h)$ kan betraktas som konstant i den tunna skivan. Vi får



$m = \int_0^3 dm = \frac{\pi}{9} \int_0^3 (400 - 100h) dh = \frac{\pi}{9} [400h - 50h^2]_0^3 =$

Ex: En plan skiva ges av $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$.

④

Areadensiteten ges av

$\rho(x) = x + 1$ (kg/m²)

OBS! Densiteten beror här bara på x! Bestäm massan!

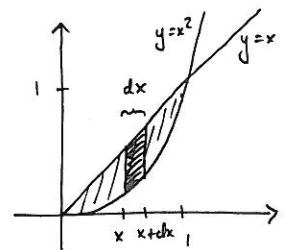
Vi får nu

$dm = \rho(x) \cdot dA \approx$

$\approx (x+1) \cdot (x-x^2) \cdot dx$

$= (x-x^3) dx$

och totalmassan ges av



$m = \int_0^1 dm = \int_0^1 (x-x^3) dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4]_0^1 = \frac{1}{4}$ kg

Masscentrum (tyngdpunkt):

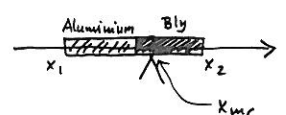
Vad menas med masscentrum?

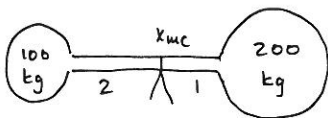
Homogen stav:

$x_{mc} = \frac{x_1 + x_2}{2}$



Blandad stav:

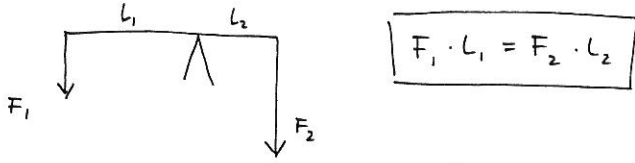




(5)

Placerar vi en vridningsaxel i x_{mc} så ska systemet vara i jämvikt!

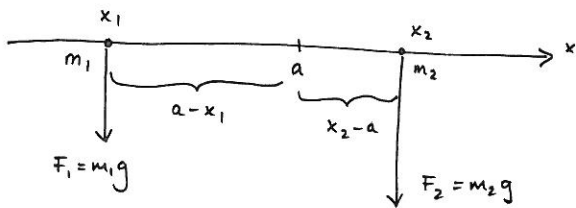
Fysikaliskt: Jämvikt då vridningsmomenten lika stora åt bägge håll.



Anm: Hävstångsprincipen

• Låt oss först studera en "stav" med två masspunkter:

Ex: Låt m_1 och m_2 vara punktformiga massor placerade i x_1 och x_2 , och låt a vara en punkt mellan x_1 och x_2 :



Jämvikt kring a då $m_1 g(a-x_1) = m_2 g(x_2-a)$

Jämvikt då $\int_K dm(x-a) = 0$. Omskrivning ger (7)

$$\int_K dm(x-a) = \int_K x dm - a \int_K dm = \int_K x dm - aM = 0$$

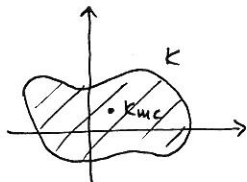
$$a = \frac{1}{M} \int_K x dm \quad M = \text{stavens totalmassa}$$

Def (Masscentrum):

(a) $x_{mc} = \frac{1}{M} \int_K x dm$ kallas masscentrum (tyngdpunkt) av kroppen K u.a.p. x -led.

• För två- och tredimensionella kroppar räknar vi ut masscentrum genom att beräkna masscentrum med avseende på varje led:

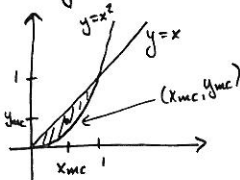
T.ex. $K_{mc} = (x_{mc}, y_{mc})$



Ex: Beräkna masscentrum för den homogena skivan K som ges av $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$.

Lösning: K homogen $\Rightarrow \rho$ konstant

så $M = \rho \cdot A = \rho \int_0^1 (x-x^2) dx = \dots = \frac{\rho}{6}$



$$\Leftrightarrow m_1(x_1-a) + m_2(x_2-a) = 0 \quad (6)$$

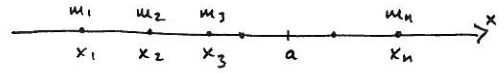
Förenkling ger $(m_1+m_2)a = m_1x_1 + m_2x_2$

$$\Leftrightarrow a = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{M} (m_1x_1 + m_2x_2)$$

där $M = m_1+m_2$

• Vad händer om vi har n st punktformiga massor?

Ex: Massor m_1, m_2, \dots, m_n



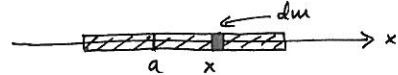
Jämvikt för vi då

$$m_1(x_1-a) + m_2(x_2-a) + \dots + m_n(x_n-a) = 0$$

Omskrivning ger $a = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$,

dvs. $a = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$ där $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$

• Vi provar nu med en stav K (med oändligt många punktformiga massor dm)



x-led: $dm = \rho(x-x^2) dx =$

$$= 6M(x-x^2) dx$$

$$\Rightarrow x_{mc} = \frac{1}{M} \int_K x dm =$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^1 x \cdot 6M(x-x^2) dx = 6 \int_0^1 (x^2-x^3) dx =$$

$$= 6 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

y-led: $dm = \rho(\sqrt{y}-y) dy =$

$$= 6M(\sqrt{y}-y) dy$$

$$\Rightarrow y_{mc} = \frac{1}{M} \int_K y dm =$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^1 y \cdot 6M(\sqrt{y}-y) dy = 6 \int_0^1 (y^{3/2}-y^2) dy =$$

$$= 6 \left[\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

Svar: $K_{mc} = (x_{mc}, y_{mc}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right)$

