

Föreläsning 7:

(1)

Integraler och summor:

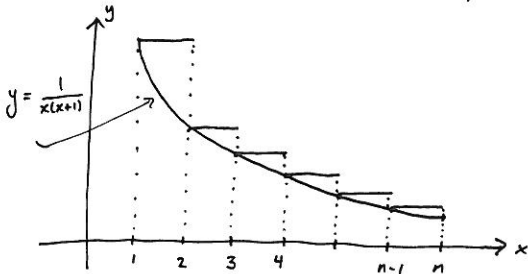
Koppling integral \leftrightarrow summa
 ("Så" att beräkna) ("Så" att beräkna)

Ex: Hur kan man uppskatta värdet av summan

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} ?$$

- Jo, med hjälp av en integral.

Betrakta funktionen $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $1 \leq x \leq n$.



Anean under trappfunktionen i figuren är

$$f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots + f(n-1) \cdot 1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

och denna aneas är större än aneas under grafen till $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, dvs.

Vi beräknar integralen:

(3)

$$\int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^n$$

p. brökes upp.

$$= \ln n - \ln(n+1) - \ln 1 + \ln 2 = \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) + \ln 2$$

Detta ger

$$\frac{1}{n(n+1)} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) + \ln 2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{2} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) + \ln 2$$

Anm: Uppskattningen uppåt kan m.t.ex. användas för att visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ är konvergent.

Eftersom $\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) + \ln 2 \rightarrow \frac{1}{2} + \ln 1 + \ln 2$, $n \rightarrow \infty$

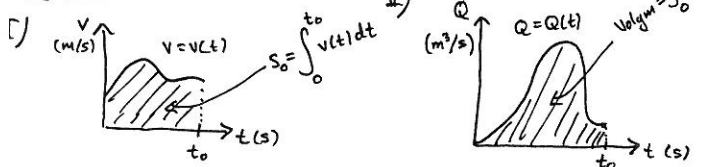
är följden $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ uppåt begränsad. Tillsammans

med det faktum att den är växande följer det att serien är konvergent och att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{2} + \ln 2$.

(Jämför även Cauchy's integralkriterium. Läs själva i boken!)

Användning av integraler

Fysikaliska exempel:

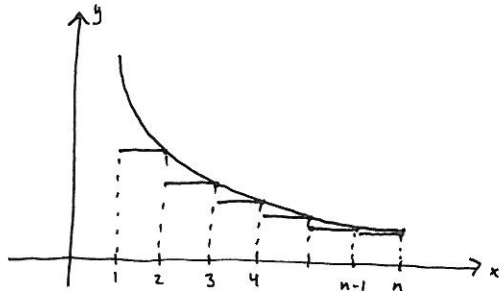


$$\int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \quad (2)$$

Av detta följer att

$$\frac{1}{n(n+1)} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx \leq \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Omvänt, om vi bildar trappfunktionen



så är aneas under denna $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)}$, och vi ser att

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx$$

Detta ger

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{1 \cdot 2} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx$$

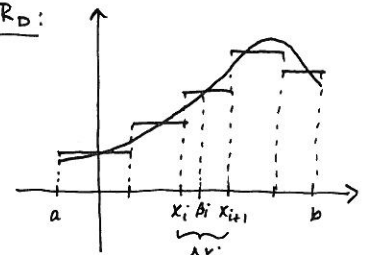
Vi har nu visat att

$$\frac{1}{n(n+1)} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{1 \cdot 2} + \int_1^n \frac{1}{x(x+1)} dx$$

Allmän princip för tillämpning av integraler:

(4)

Riemannsumma R_D :

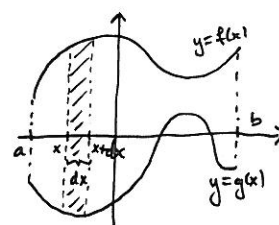


$$R_D = \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ då } "D \rightarrow 0"$$

Integral \approx "oändlig summa" av "oändligt små delar" uttryckta i dx

Plan area:

Bestäm aneas mellan $f(x)$ och $g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$).

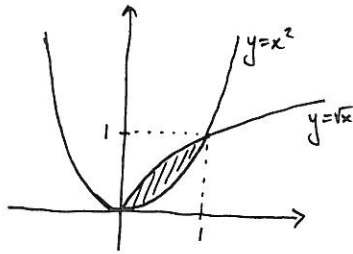


Då dx är litet är den skuggade aneas $\approx (f(x) - g(x)) dx$

$$\text{Aneas} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Ex: Bestäm arean av det område i xy-planet (5) som begränsas av $y = \sqrt{x}$ och $y = x^2$.

Kurvorna skär varandra då $x=0$ och $x=1$, och $\sqrt{x} \geq x^2$ för $0 \leq x \leq 1$.

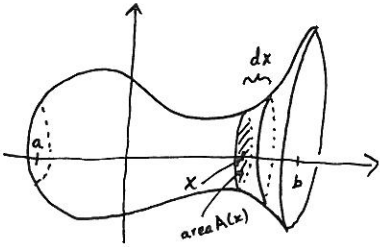


$$\text{Area} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ a.e.}$$

OBS! Aneur är alltid positiva!

Volym: Beträkta följande figur:



Vid punkten x , skär ut en tunn skiva av tjocklek dx .

Då gäller

$$dV \approx A(x) \cdot dx \quad \text{om } dx \text{ litet}$$

→
volymen av den tunna skivan

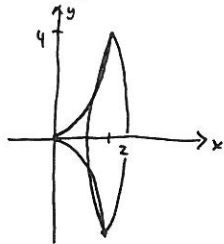
Med andra ord, vi approximerar skivan med en cylinder.

Ex: Beräkna volymen av den rotations kropp som bildas (7) då $y = f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, roterar kring x-axeln.

$$\text{Volym} = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx =$$

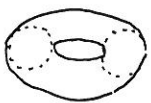
$$= \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 =$$

$$= \frac{32}{5} \pi \text{ v.e.}$$



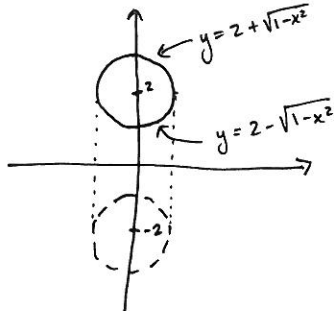
Ex: Beräkna volymen av den rotations kropp som uppstår då cirkeln $x^2 + (y-2)^2 = 1$ roterar kring x-axeln.

Rotationskroppen blir en torus (badning)



$$x^2 + (y-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$y = 2 \pm \sqrt{1-x^2} \quad \text{OBS! } y \text{ ej funktion av } x.$$



$$\text{Volym} = V_1 - V_2 \text{ där } \begin{cases} V_1 = \text{volym då } y = 2 + \sqrt{1-x^2} \text{ roterar} \\ V_2 = \text{volym då } y = 2 - \sqrt{1-x^2} \text{ roterar} \end{cases}$$

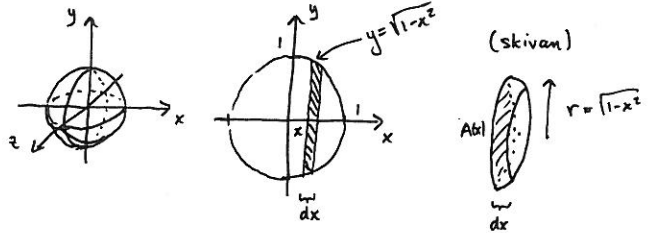
$$\Rightarrow \text{Volym} = \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{1-x^2})^2 dx = \dots = \text{förenkling}$$

Summerar vi volymen av alla sådana tunna skivor får vi

$$\text{Volym} = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Formeln kallas skivformeln.

Ex: Beräkna volymen av enhetsklotet (radie=1)



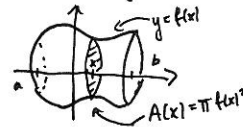
$$dV \approx A(x) dx = \pi (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \pi (1-x^2) dx$$

då dx är litet. Vi får

$$\text{Volym} = \int_{-1}^1 dV = \int_{-1}^1 \pi (1-x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3} \text{ v.e.}$$

Rotationsvolym:

Låt kurvan $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, rotera kring x-axeln:



Skivformeln ger

$$\text{Volym} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$\dots = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t, dx = \cos t dt \\ x = 1 \Rightarrow t = \pi/2 \\ x = -1 \Rightarrow t = -\pi/2 \end{array} \right] = \quad (8)$$

$$= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cos t dt =$$

$$= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = 8\pi \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 8\pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin(-\pi) \right) = 4\pi^2 \text{ v.e.}$$

Rotationsvolym kring y-axeln:

För rotationer kring y-axeln kan man antingen byta roll på x och y (dvs. först bestämma invarsen) och göra som ovan, eller använda sig av "rörformeln".

Ex: Låt området mellan x-axeln och $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ rotera kring y-axeln. Bestäm volymen.

$$\text{Vi får } dV \approx 2\pi x \cdot dx \cdot y =$$

$$= 2\pi x \cdot \sin x \cdot dx \text{ då } dx \text{ litet}$$

rörets
outkret

$$\text{Volym} = \int_0^\pi dV = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi \left[-x \cos x \right]_0^\pi +$$

$$+ 2\pi \int_0^\pi \cos x dx = 2\pi^2 + 2\pi \left[\sin x \right]_0^\pi =$$

$$= 2\pi^2 \text{ v.e.}$$

