

Föreläsning 12

(1)

Linjära ekvationer av andra ordningen

Tidigare: Linjära differentialekvationer av första ordningen:

$$y' + g(x)y = h(x).$$

Nu: Linjära diff. ekv. av andra ordningen:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$$

Ann: Vi återkommer till namnet "linjär".

Börjar med att lösa specialfallet $h(x) = 0$.

Ekvationen $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ kallas homogen.

Lösning av $y'' + ay' + by = 0$:

Koncentrerar oss på fallet $a(x) = a, b(x) = b$, där a och b är konstanter.

Def: Polynom $p(r) = r^2 + ar + b$ kallas för det karaktäristiska polynom till ekvationen

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Ekvationen $p(r) = 0$ kallas karaktäristiska ekvationen.

Ex: Lös den homogena ekvationen

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad !$$

Lösning: Kar. ekv. $p(r) = r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$

Satsen ovan ger lös. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, C_1, C_2 konst. (OBS! 2 konstanter)

Ex: Lös $y'' - 4y' + 4y = 0$!

Lösning: Kar. ekv. $p(r) = r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$(r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = 2 \text{ (dubbelrot)}$$

Vi får lösningarna $y = (C_1 x + C_2) e^{2x}$.

Ex: Lös $y'' + 4y' + 5y = 0$!

Lösning: Kar. ekv. $p(r) = r^2 + 4r + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$(r+2)^2 = -1 \Leftrightarrow r = -2 \pm i. \text{ Detta ger lsg.}$$

$$y = C_1 e^{(-2+i)x} + C_2 e^{(-2-i)x}$$

Vi skriver om m.h.a. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$:

$$y = C_1 e^{(-2+i)x} + C_2 e^{(-2-i)x} = e^{-2x} (C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix})$$

$$= e^{-2x} (C_1 (\cos x + i \sin x) + C_2 (\cos x - i \sin x)) =$$

$$= e^{-2x} ((C_1 + C_2) \cos x + i(C_1 - C_2) \sin x) =$$

Sats1: Om r_1, r_2 rötter till den karakteristiska ekvationen $p(r) = 0$, så ges lösningarna till

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \text{av}$$

$$\begin{cases} y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{om } r_1 \neq r_2 \text{ (} C_1, C_2 \text{ konst.)} \\ y(x) = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} & \text{om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Bevis: Vi väntar till allra sist i föreläsningen, men kollar det "enkla fallet" för fallet $r_1 \neq r_2$ så länge:

Antag $r_1 \neq r_2$. Vi får

$$\begin{cases} y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ y' = r_1 C_1 e^{r_1 x} + r_2 C_2 e^{r_2 x} \\ y'' = r_1^2 C_1 e^{r_1 x} + r_2^2 C_2 e^{r_2 x} \end{cases}$$

Sätter vi in detta i ekvationens vänsterled får vi

$$\begin{aligned} & r_1^2 C_1 e^{r_1 x} + r_2^2 C_2 e^{r_2 x} + a(r_1 C_1 e^{r_1 x} + r_2 C_2 e^{r_2 x}) + \\ & + b(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}) = C_1 e^{r_1 x} (\underbrace{r_1^2 + ar_1 + b}_=0) + \\ & + C_2 e^{r_2 x} (\underbrace{r_2^2 + ar_2 + b}_=0) = 0 \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

Har dock inte visat att det ej finns fler lösningar (ännu!)

$$= e^{-2x} (A \cos x + B \sin x) \quad \text{där } \begin{cases} A = C_1 + C_2 \\ B = i(C_1 - C_2) \end{cases} \quad (4)$$

Sats2: Om $p(r) = 0$ har rötterna $r_{1,2} = a \pm bi$

($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) får vi lösningarna

$$y = e^{ax} (A \cos(bx) + B \sin(bx))$$

där A, B är konstanter

Ex: Lös $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Lösning: $p(r) = r^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 3i$

Satsen ovan ger lösningarna

$$y = e^{0 \cdot x} (A \cos 3x + B \sin 3x) = A \cos 3x + B \sin 3x$$

Vi får $y(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A = 2$, och

$$y' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x \Rightarrow$$

$$y'(0) = -3A \sin 0 + 3B \cos 0 = 3B = 3 \Leftrightarrow B = 1$$

Svar: $y(x) = 2 \cos 3x + \sin 3x$ (OBS! 2 beg. villkor)

Ex (harmonisk svängning):

Massa $m = 1$ kg + fjäder; fjäderkonstant $k = 9$ N/m

$$F(t) = -k \cdot y(t)$$

Newtons kraftelvation:

$$-k \cdot y(t) = m \cdot a(t)$$

↖ acceleration

$$\Leftrightarrow m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t)$$

$$\Leftrightarrow y''(t) = -\frac{k}{m} y(t) \Leftrightarrow y''(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

Med $m=1, k=9$, får vi

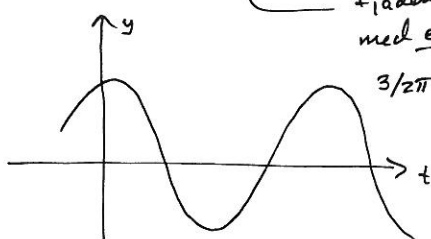
$$y'' + 9y = 0$$

Denna elv. löste vi ovan och fick

$$y = A \cos 3t + B \sin 3t$$

OBS! Hjälppunktmotoden ger att

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(3t + \delta)$$



Fjädem sväng med egenfrekvens

$$\Leftrightarrow_{w=r_1} z'' + (2r_1 + a)z' = 0 \quad (*) \quad (7)$$

Linjär av första ordningen med z' som obekant!

$$g(x) = 2r_1 + a, \quad G(x) = (2r_1 + a)x, \quad e^{G(x)} = e^{(2r_1 + a)x}$$

$$(*) \Leftrightarrow e^{(2r_1 + a)x} z'' + e^{(2r_1 + a)x} \cdot (2r_1 + a)z' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(e^{(2r_1 + a)x} \cdot z' \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{(2r_1 + a)x} \cdot z' = C \Leftrightarrow z' = C e^{-(2r_1 + a)x}$$

Antag att $2r_1 + a \neq 0$: Då gäller

$$z = \frac{C}{-(2r_1 + a)} e^{-(2r_1 + a)x} + C_1$$

Nu hade vi $z = e^{-wx} y = e^{-r_1 x} y$, så

$$e^{-r_1 x} y = \frac{C}{-(2r_1 + a)} e^{-(2r_1 + a)x} + C_1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{C}{\underbrace{-(2r_1 + a)}_{=C_2}} e^{(r_1 - (2r_1 + a))x} + C_1 e^{r_1 x} =$$

$$= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{(-a - r_1)x}$$

Bevis (Sats 1):

(6)

Antag att vi vill lösa elvationen

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (*)$$

Inför ny funktion $z(x)$ via $z(x) = e^{-wx} y(x)$, där w är ett tal (som vi sedan ska välja "smart")

$$z = e^{-wx} y \Leftrightarrow y = z e^{wx}$$

Vi får då

$$\begin{cases} y' = z' e^{wx} + w z e^{wx} = e^{wx} (z' + w z) \\ y'' = z'' e^{wx} + w z' e^{wx} + w z' e^{wx} + w^2 z e^{wx} = \\ = e^{wx} (z'' + 2w z' + w^2 z) \end{cases}$$

Sätt in detta i (*):

$$e^{wx} (z'' + 2w z' + w^2 z) + a e^{wx} (z' + w z) + b z e^{wx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e^{wx}} (z'' + (2w + a)z' + (w^2 + aw + b)z) = 0$$

$$\Leftrightarrow z'' + (2w + a)z' + (w^2 + aw + b)z = 0$$

Välj nu w som r_1 , ett av nollställena till $p(r) = r^2 + ar + b$. Vi får $p(r_1) = p(w) = w^2 + aw + b = 0$

Observation: $p(r) = r^2 + ar + b$, men

$$\text{samtidigt } p(r) = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$$

Av detta följer att $a = -(r_1 + r_2)$

$$\text{Vi får nu } y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{(r_1 + r_2 - r_1)x} =$$

$$= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \text{ om } 2r_1 + a \neq 0$$

Men $2r_1 + a = 2r_1 - (r_1 + r_2) = r_1 - r_2$, så

$$2r_1 + a \neq 0 \Leftrightarrow r_1 - r_2 \neq 0 \Leftrightarrow r_1 \neq r_2$$

Fallet $2r_1 + a = 0$: Observera att $2r_1 + a = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$

$$\text{Då har vi } z' = C \Leftrightarrow z = Cx + C_2 =$$

$$\text{och vi får } y e^{-r_1 x} = C_1 x + C_2 \quad (C_1 = C)$$

$$y e^{-r_1 x} = C_1 x + C_2$$

$$\Leftrightarrow y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} \quad \square$$

Nästa föreläsning ska vi lära oss att lösa icke-homogena elvationer:

$$y'' + ay' + by = h(x)$$