

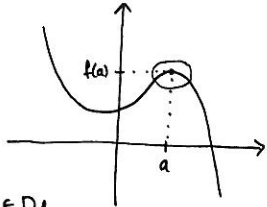
Föreläsning 6:

(1)

Lokala extrempunkter:

Def (Lokalt maximum/minimum):

f har lokalt maximum i a om det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att



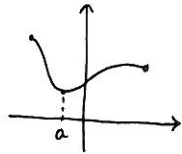
$f(x) \leq f(a)$ för alla $x \in D_f$ sådana att $|x-a| < \delta$
(Om $f(x) < f(a)$, så strängt lokalt maximum)

Anm: Motsv. definition för lokalt minimum.

Om vi har lokalt min. eller lokalt max. i a säger vi att a är en lokal extrempunkt, och att $f(a)$ är ett lokalt extremvärde.

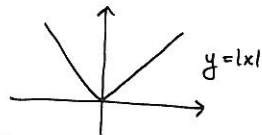
Sats: Antag a inne punkt i D_f .

Då gäller f har lok. extrem. i a } $\Rightarrow f'(a) = 0$
 f deriverbar i a



Anm: Då $f'(a) = 0$ kallas a stationär punkt.

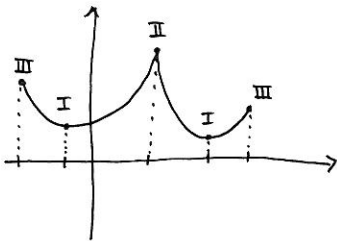
men saluar derivata där!



(3)

Sammanfattning:

En funktion f kan ha lok. extremvärde i a då

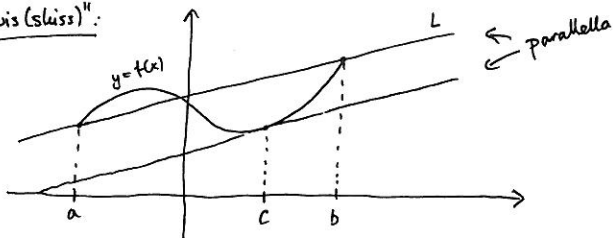


- I) $f'(a) = 0$
- II) $f'(a)$ ej existerar
- III) a är en randpunkt

Sats (Medelvärdessatsen): Om f är kontinuerlig i $a < x < b$ och deriverbar i $a < x < b$, så finns det en punkt c ($a < c < b$) sådan att

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

"Bevis (sluss)":



Bevis: Antag t.ex. f har lok. max. i $a \Rightarrow$

(2)

$f(a+h) - f(a) \leq 0$ då h är litet. Vi får

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \begin{cases} \leq 0 & \text{då } h > 0 \\ \geq 0 & \text{då } h < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \text{ och } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

\Rightarrow högerderivata ≤ 0 och vänsterderivata ≥ 0 .

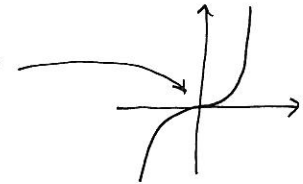
Då f är deriverbar i a gäller högerder. = vänsterder. = 0

$$\Rightarrow f'(a) = 0 \quad \square$$

Anm1: Omvändningen gäller inte!

T.ex. $f(x) = x^3$ har derivata $f'(x) = 3x^2$. Vi har då $f'(0) = 0$, men f har varken lok. max. eller lok. min i $x=0$.

kallas terrasspunkt



Anm2: Vi kan också ha lokala extrempunkter där derivatan ej existerar (där vi har en "spets" i grafen. Exempelvis har $f(x) = |x|$ lokalt min. i $x=0$,

Verkar troligt att det finns en tangent till kurvan (4) någonstans i intervallet med samma lutning som L.

$$L:s \text{ lutning } \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad \square$$

Sats: Om $f'(x) = 0$ i ett helt intervall $a < x < b$, så är $f(x) = D$ (konstant) i $a < x < b$.

Bevis: För godtyckliga tal $a < x_0 < x_1 < b$ ger medelvärdessatsen

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$$

för något $x_0 < c < x_1$. Enligt

förutsättning är $f'(c) = 0$, vilket ger

$$f(x_1) - f(x_0) = 0 \text{ dvs. } f(x_0) = f(x_1).$$

Alltså, f har samma värde överallt,

dvs. $f(x) = D$ där D är en konstant. \square

Ex: Visa att $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$ är en konstant funktion!

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0. \text{ Enligt satsen}$$

ovan är $f(x) = D$ (konstant). (5)

Vilken är konstanten? Sätt t.ex. $x=1$:

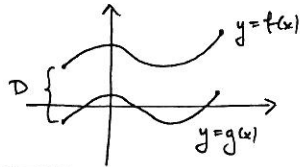
$$D = \arctan 1 + \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Följsats: Om $f'(x) = g'(x)$ i ett helt intervall $a < x < b$, så är $f(x) = g(x) + D$ (D konstant)

Beweis: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ end. fönt.

$$\Rightarrow (f-g)(x) = D \Rightarrow f(x) - g(x) = D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + D$$



Sats: Om f deriverbar i $]a, b[$ så gäller att

(i) $f'(x) > 0$ i $]a, b[\Rightarrow f$ str. växande i $]a, b[$

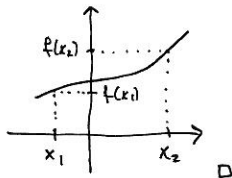
(ii) $f'(x) < 0$ i $]a, b[\Rightarrow f$ str. avtagande i $]a, b[$

Beweis: (i):

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Rightarrow f$ str. växande



$n=1$: $D(f \cdot g) = \underline{Df \cdot g + f \cdot Dg}$ (7)

$$\begin{aligned} n=2: D^2(f \cdot g) &= D(Df \cdot g + f \cdot Dg) = \\ &= D^2f \cdot g + Df \cdot Dg + Df \cdot Dg + f \cdot D^2g = \\ &= \underline{D^2f \cdot g + 2 \cdot Df \cdot Dg + f \cdot D^2g} \end{aligned}$$

Liknar kvadreringsregeln. I själva verket gäller

Leibniz formel

$$D^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} f \cdot D^k g \quad (\text{Obs! } D^0 f = f)$$

Ex: Beräkna $D^{100}(e^{-3x} \cdot x^2)$!

$$D^{100}(e^{-3x} \cdot x^2) = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} D^{100-k}(e^{-3x}) D^k(x^2) =$$

$$= \binom{100}{0} D^{100}(e^{-3x}) \cdot x^2 + \binom{100}{1} D^{99}(e^{-3x}) \cdot 2x +$$

$$+ \binom{100}{2} D^{98}(e^{-3x}) \cdot 2 + \underbrace{\binom{100}{3} D^{97}(e^{-3x}) \cdot 0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{=0} =$$

$$= 1 \cdot (-3)^{100} \cdot e^{-3x} \cdot x^2 + 100 \cdot (-3)^{99} \cdot e^{-3x} \cdot 2x +$$

$$+ 4950 \cdot (-3)^{98} \cdot e^{-3x} \cdot 2 = 3^{99} e^{-3x} (3x^2 - 200x + 3300)$$

Anm: $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ växande; $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ avtagande

Ex: Visa att $f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + \cos x}$ är strängt växande då $x > 0$.

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{2} + \cos x} \left(2 \cdot \frac{x}{2} - \sin x \right) = e^{\frac{x^2}{2} + \cos x} (x - \sin x)$$

Vi vet att $e^{\frac{x^2}{2} + \cos x} > 0$ och dessutom gäller $x - \sin x > 0$ då $x > 0$ (eftersom $\sin x < x$ då $x > 0$ enligt tidigare sats). Det följer att

$f'(x) > 0$ då $x > 0 \Rightarrow f$ str. växande då $x > 0$.

Högre derivator:

Def: n :te derivatan $D^n f$ definieras rekursivt genom $D^n f = D(D^{n-1} f)$

Ex: $f(x) = x^3$, $(Df)(x) = 3x^2$, $(D^2 f)(x) = 6x$
 $(D^3 f)(x) = 6$, $(D^4 f)(x) = (D^5 f)(x) = \dots = 0$

Räkneregler för högre derivator:

Summa: $D^n(f+g) = D^n f + D^n g$

Produkt: $D^n(f \cdot g) = ?$ Vi provar!