

# Föreläsning 8

(1)

## Tillämpningar av grafitning:

- Optimering (största/minsta värde)
  - Antal rötter till ekvationer
  - Visa olikheter
- Samtliga problem ovan löses genom att skissera grafen till en funktion!

### Optimering:

Ex: Bestäm största resp. minsta värde till

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25, \quad -3 \leq x \leq 1.$$

Lösning:  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 40x = 4x(x^2 - 3x - 10)$   
 $= 4x(x+2)(x-5)$

Nollställen  $x=0, -2, 5$  ( $x=5$  utanför intervall)

Teckenstudium där vi även tar med ändpunkterna  $x=-3, 1$ :

	-3	-2	0	1	
x	-	-	0	+	
x+2	-	0	+	+	
x-5	-	-	-	-	
f'(x)	-	0	0	-	
f(x)	34	-7	25	2	

$f_{\max} = 34$   
 $f_{\min} = -7$

Ex: Bestäm största resp. minsta värde till

(2)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25, \quad x \in \mathbb{R}$$

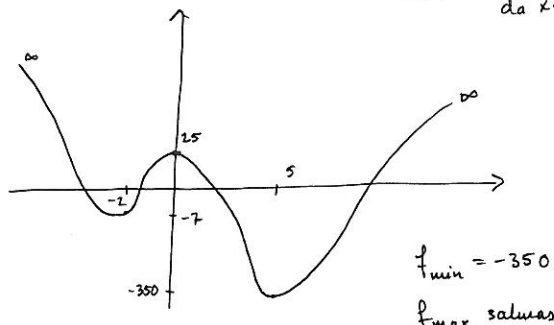
Lösning: Euligt ovan gäller  $f'(x) = 4x(x+2)(x-5)$

Alla nollställen intressanta, dvs. även  $x=5$ :

	-2	0	5	
x	-	-	0	+
x+2	-	0	+	+
x-5	-	-	-	0
f(x)	-	0	0	+
f(x)	-7	25	-350	

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25 = x^4 \left( 1 - \frac{4}{x} - \frac{20}{x^2} + \frac{25}{x^4} \right) \rightarrow \infty$$

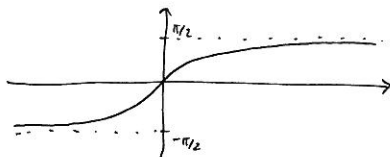
$\downarrow$   
 $\infty$        $\rightarrow 1$       då  $x \rightarrow \pm\infty$



Ann: Största/minsta värde behöver ej existera!

Ex: Funktionen  $f(x) = \arctan x, x \in \mathbb{R}$ , saknar både största och minsta värde!

(3)



OBS! Värdet måste alltid utas i intervallet.

Ann: Första exemplet är lite speciellt, då  $f$  är en kontinuerlig funktion på intervallet  $-3 \leq x \leq 1$  (ett slutet, begränsat (kompakt) intervall). Vi har tidigare sett att sådana funktioner alltid har största och minsta värde.

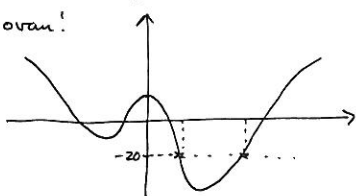
### Ekvationer:

Ex: Hur många rötter har ekvationen

$$x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25 = -20 \quad ?$$

Lösning: Rita grafen till  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25$ .

Gjordes ovan!



Svar: 2 st.

Ex: Hur många rötter har ekvationen

(4)

$$x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 25 = c \quad ?$$

Lösning: Vi ser efter i grafen:

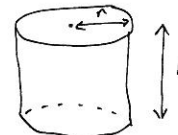
$c < -350$	0 rötter
$c = -350$	1 rot
$-350 < c < -7$	2 rötter
$c = -7$	3 rötter
$-7 < c < 25$	4 rötter
$c = 25$	3 rötter
$c > 25$	2 rötter

### Optimering (igen):

Ex: En cylinderformad ölburk med locke som innehåller 0.5 liter ska tillverkas. Vilka mått bör den ha för att plåtåtgången ska bli så liten som möjligt?

Lösning (enhet-dm):

$$V = \pi r^2 h$$



$$\text{Vi får } \pi r^2 h = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{1}{2\pi r^2}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

( $2\pi r$  = cylinderns omkrets)

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{2\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1}{r} \quad (5)$$

Vi vill hitta minsta värde till funktionen

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}, \quad r > 0.$$

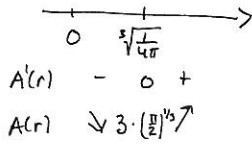
$$A'(r) = 4\pi r - \frac{1}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 1}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{4\pi}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \quad (\approx 0.43 \text{ dm})$$

Klart att  $4\pi r^3 - 1$  är <sup>strängt</sup> växande så

$$A'(r) > 0 \text{ då } r > \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \text{ och}$$

$$A'(r) < 0 \text{ då } r < \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}$$



Svar:

Vi har minsta värde då

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \text{ och } h = \frac{1}{2\pi \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$$

$$\text{Aneam blir då } A\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}}\right) = \dots = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3}$$

Anm: Notera att  $h = 2r \approx 0.86 \text{ dm}$

Ex: En komet rör sig längs hyperbelgrenen

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x \geq 0$$

Hur nära kommer kometen punkten  $(0,1)$ ?

Lösning:

Pythagoras sats ger

$$d^2 = x^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}, \text{ så}$$

$$d = \sqrt{y^2 + 1 + (y-1)^2} = \sqrt{2y^2 - 2y + 2}$$

$$\uparrow$$

$$x^2 = y^2 + 1$$

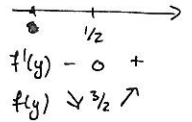
Vi vill hitta minsta värde till  $d(y) = \sqrt{2y^2 - 2y + 2}, y \in \mathbb{R}$ .

Observation: Räcker att hitta minsta värde till

$$f(y) = 2y^2 - 2y + 2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$f'(y) = 4y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(1/2) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$



Svar: Det kortaste avståndet är  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Anm: Det är lätt att hitta minsta värde till  $f$  genom att kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned} f(y) &= 2y^2 - 2y + 2 = 2(y^2 - y + 1) = 2\left((y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right) = \\ &= 2 \underbrace{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \text{ med likhet då } y = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

I detta fall hade vi inte behövt derivata!

Olikheter:

(7)

Ex: Visa att  $\ln(1+4x) > \arctan 3x$  för  $x > 0$ .

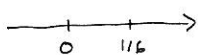
Lösning: Sätt  $f(x) = \ln(1+4x) - \arctan 3x$ .

Räcker visa att  $f(x) > 0$  för  $x > 0$ . Vi ritat grafen!

$$f'(x) = \frac{1}{1+4x} \cdot 4 - \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{4(1+9x^2) - 3(1+4x)}{(1+4x)(1+9x^2)} =$$

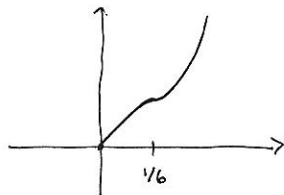
$$= \frac{36x^2 - 12x + 1}{(1+4x)(1+9x^2)} = \frac{36\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right)}{36\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right)} = \frac{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0}{\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{9}\right) > 0} \geq 0$$

med likhet endast då  $x = \frac{1}{6}$



$f$  str. växande då  $x \geq 0$

$f'(x)$   $+ \ 0 \ +$   
 $f(x)$   $\nearrow \ \nearrow$   
terrasspunkt



Samtidigt är  $f(0) = \ln 1 - \arctan 0 = 0$

$\Rightarrow f(x) > 0$  då  $x > 0$ .