

# Instuderingsfrågor för Endimensionell analys – delkurs A2

Reviderade aug 2012

## Anvisningar

Avsikten med följande frågor är att hjälpa dig med självkontroll av dina kunskaper. Om du känner dig osäker på svaren bör du slå upp motsvarande avsnitt i läroböckerna och läsa på ytterligare en gång. Många frågor börjar med orden ”Vad menas med att”. Denna fras betyder precis detsamma som frasen ”Ge definitionen av att”. Kontrollera gärna med övningsledare och föreläsare om dina svar på frågorna kan anses vara tillfredsställande.

## Kapitel 9

1. Låt  $\alpha > 0$  och  $a > 1$ . Arrangera funktionerna  $x^\alpha$ ,  $\ln x$  och  $a^x$  i storleksordning för stora värden på  $x$ . Preciser svaret i form av gränsvärden då  $x \rightarrow \infty$ .
2. Definiera talet  $e$ .
3. Definiera innebörden av uttrycket ”funktionen  $f$  är kontinuerlig i punkten  $a$ ”.
4. Ange några egenskaper hos kontinuerliga funktioner på slutna, begränsade intervall.
5. Lär dig standardgränsvärdena nummer (9.19) till (9.25) i läroboken. Utgående från de två gränsvärdena

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e \quad \text{då } x \rightarrow \pm\infty, \quad \text{och} \quad \frac{a^x}{x^\alpha} \rightarrow \infty \quad \text{då } x \rightarrow \infty$$

lär dig härleda (9.20), (9.23), (9.24) och (9.25).

6. Uttryck av formen  $f(x)^{g(x)}$  kan skrivas om med hjälp av funktionerna  $\exp$  och  $\ln$ . Hur då?
7. Vad menas med att ”serien  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  är konvergent”?
8. Låt  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$  vara en konvergent serie. Vad menas med seriens summa?
9. Visa att den geometriska serien  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  är konvergent precis då  $|x| < 1$  och ange dess summa.

## Kapitel 10

10. Formulera definitionen av att funktionen  $f$  är deriverbar i punkten  $a$ .
11. Definiera beteckningen  $f'(a)$ .
12. Visa att om  $f$  är deriverbar i  $a$  så är  $f$  kontinuerlig i  $a$ . Ge exempel på att omvändningen inte gäller.
13. Rita en funktion som i  $x = 0$  är
  - a) diskontinuerlig,
  - b) kontinuerlig men ej deriverbar,
  - c) deriverbar.
14. Härled derivatan av  $e^x$  genom att utgå från derivatans definition.
15. Ange några fysikaliska tolkningar av uttrycket  $f'(t_0)$ , där  $f$  är t.ex. en sträcka, temperatur eller volym.

16. Vad menas med tangenten till en funktionskurva  $y = f(x)$  i en punkt  $(a, f(a))$  på grafen? Svara såväl med ord som i form av en ekvation.
17. Hur får man fram en ekvation för normalen till en kurva i en given punkt på kurvan?
18. Ange formler för derivatan av a)  $f(g(x))$ , b)  $f^{-1}(x)$  c)  $f(x)g(x)$ , d)  $f(x)/g(x)$ . Bevisa c) och d).
19. Härled derivatan av  $\ln x$ ,  $x > 0$ , genom att utgå från derivatan av  $e^x$ . Härled sedan derivatan av  $\ln|x|$ ,  $x \neq 0$ .
20. Skriv upp derivatorna av alla standardfunktionerna; se (10.9)–(10.20) i läroboken.
21. Härled derivatan av  $\sin x$  genom att utgå från derivatans definition.  
(Gränsvärdet  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$  får användas.)
22. Härled derivatorna av  $\arcsin x$  och  $\arctan x$ .
23. Definiera innebörden i uttrycket ” $f$  har lokalt minimum i punkten  $a$ ”.
24. Vad menas med en lokal extrempunkt respektive en stationär punkt till en funktion?
25. Hur hittar man eventuella lokala extrempunkter till en deriverbar funktion?
26. Formulera medelvärdessatsen och förklara dess innehåll med en figur.
27. Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är positiv så är funktionen strängt växande.
28. Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är noll så är funktionen konstant.
29. Vad menas med att en rät linje  $y = ax + b$  är en (sned) asymptot till en funktionskurva  $y = f(x)$ , då  $x \rightarrow \infty$ ?
30. Hur bestämmer man eventuella asymptoter till en rationell funktion?
31. Hur löser man ett optimeringsproblem för en deriverbar funktion  $f(x)$ ,  $x \in I$ , där  $I$  är ett intervall? Ange ett villkor som garanterar att ett största och ett minsta värde finns.
32. Ange en metod för att visa en olikhet av formen  $f(x) > g(x)$ ,  $x \in I$ , där  $I$  är ett intervall ( $f$  och  $g$  är deriverbara).
33. Definiera derivatan av en komplexvärd funktion.
34. Härled derivatan av  $f(x) = e^{wx}$ , där  $w$  är ett komplext tal.

## Kapitel 11

35. Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm.
36. För vilka  $x$  är Maclaurinpolynomet  $p_n(x)$  en god approximation av  $f(x)$ ?  
Varför vill man approximera med polynom?
37. Hur avgör man hur noggrann approximationen i föregående fråga är?

38. Skriv upp Taylors formel (utveckling kring  $x = a$ ) med Lagranges restterm.
39. Skriv upp standardutvecklingarna (11.5)–(11.10) i läroboken.
40. Visa med Maclaurinutveckling att  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  för varje  $x \in \mathbb{R}$ . (Använd gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .)

## Kapitel 6

41. Definiera följande tre beteckningar:  $|z|$ ,  $\bar{z}$  och  $\arg z$ , där  $z$  är ett komplext tal.
42. Hur tolkas följande operationer i det komplexa talplanet  
 a) att ta absolutbelopp av  $z$ , b) att konjugera  $z$ , c) att addera  $w$  till  $z$ ,  
 d) att multiplicera  $z$  med  $w$ ?
43. Skriv upp och bevisa formler för  $\overline{zw}$  och  $|zw|$ .
44. Formulera triangelolikheten.
45. Hur skriver man kvoten mellan två komplexa tal på rektangulär form?
46. Definiera beteckningarna  $e^{iy}$  och  $e^{x+iy}$ , där  $x$  och  $y$  är reella tal.
47. Hur gör du för att skriva ett komplext tal  $a + ib$  på polär form?
48. Hur gör du för att skriva talet  $re^{i\theta}$ , där  $r > 0$  och  $\theta \in \mathbb{R}$ , på rektangulär form  $a + ib$ ?
49. Skriv upp och härled Eulers formler.
50. Visa att  $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$  för alla reella tal  $x$  och  $y$ . Vad säger de Moivres formel?
51. Hur löser du en andragradsekvation med komplexa koefficienter?
52. Ange två metoder för att lösa andragradsekvationen  $z^2 = w$ , där  $w$  är ett givet komplext tal.
53. Hur löser du ekvationen  $z^n = w$ , där  $w$  är ett givet komplext tal?
54. Vad säger algebrans fundamentalsats? Visa att varje komplext polynom kan faktoriseras i (komplexa) förstgradsfaktorer.
55. Antag att polynomet  $p(x)$  har reella koefficienter. Visa att om  $p(\alpha) = 0$  så är även  $p(\bar{\alpha}) = 0$ .
56. Visa att varje reellt polynom kan faktoriseras i reella faktorer av högst graden två.