Föreläsning 10

1

Maclaurins formel (repetition):

Maclaurinutveckling av ordning n:

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{= P_n(x) \text{ Maclaurinpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{\substack{= R_{n+1}(x) \\ \text{Lagranges restterm}}}$$

där β mellan 0 och x

(alt. $\beta = \theta x$ där $0 \le \theta \le 1$)

Ex: Ange Maclaurinutvecklingen av ordning 2 till

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Lsg:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \implies f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \implies f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \implies f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}} \implies f^{(3)}(\beta) = \frac{3}{8(1+\beta)^{5/2}}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{8(1+\beta)^{5/2}}}{3!}x^3 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16(1+\beta)^{5/2}}x^3 \quad \beta \text{ mellan } 0 \text{ och } x.$$

2

- Om vi vill utveckla t.ex. $f(x) = \sqrt{1+x^4}$, blir det mer besvärligt, t.ex.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}} \cdot 4x^3$$

$$f''(x) = \text{kvotregeln, "krångliga räkningar"}$$

Vi kan då utnyttja följande sats:

Sats: Allt som "ser ut som" en Maclaurinutveckling är en Maclaurinutveckling.

Läs den matematiska formuleringen på s.256 i boken!

Ex: Vill vi utveckla $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ till ordning 8 kan vi göra på följande sätt:

- Utveckla först $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16(1+\theta x)^{5/2}}x^3 \quad (0 \le \theta \le 1)$$

- Ersätt sedan x med x^4:

$$\sqrt{1+x^4} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8} + \frac{1}{16(1+\theta x^4)^{5/2}}x^{12} \quad (0 \le \theta \le 1)$$

Enligt satsen ovan är detta Maclaurinpolynomet av ordning 8 till $f(x) = \sqrt{1+x^4}$. Fungerar eftersom $x^4 \to 0$ då $x \to 0$ OBS!

3

Integraler (något i förväg). Återkommer i A3.

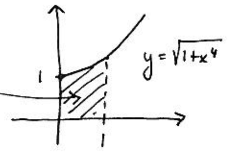
Ex: Bestäm ett värde på integralen

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$$

med 2 decimalers noggrannhet.

Anm: $\int_a^b f(x)\,dx$ anger "arean under grafen"

$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$



Formel: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, där F är en primitiv funktion till f.

Lösning: Det är för besvärligt att hitta en primitiv funktion till $\sqrt{1+x^4}$, så vi approximerar i stället funktionen med ett Maclaurinpolynom:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx + \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8\right)dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{16}\frac{1}{(1+\theta x^4)^{5/2}}x^{12}\,dx}_{= \text{felet}}$$

Uppskattning av felet ger

$$0 \le \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{16}(1+\theta x^4)^{-5/2}x^{12}}_{\text{pos. funktion}}\,dx \le \frac{1}{16}\int_0^1 x^{12}\,dx \quad *)$$

4

$$*) \quad \left.\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right\} \implies 0 \le \theta x^4 \le 1 \implies 1 \le 1 + \theta x^4 \le 2$$

$$\implies (1+\theta x^4)^{-5/2} = \frac{1}{(1+\theta x^4)^{5/2}} \le 1$$

Felets storlek ligger alltså mellan 0 och

$$\frac{1}{16}\underbrace{\int_0^1 x^{12}\,dx}_{\text{"lätt" att beräkna}} = \frac{1}{16}\Big[\underbrace{\frac{1}{13}x^{13}}_{\text{prim. funk.}}\Big]_0^1 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{13}\cdot 1^{13} - \frac{1}{13}\cdot 0^{13}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{13} = \frac{1}{208} < \frac{1}{200} =$$

$$= 0.005$$

Vidare är

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8\right)dx = \left[x + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{72}x^9\right]_0^1 =$$

$$= 1 + \frac{1}{10}\cdot 1^5 - \frac{1}{72}\cdot 1^9 - \left(0 + \frac{1}{10}\cdot 0 - \frac{1}{72}\cdot 0\right) = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{72} =$$

$$= \frac{782}{720} \approx 1.0861, \text{ vilket ger}$$

$$1.0861 \approx \frac{782}{720} \le \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \frac{782}{720} + 0.005 \approx 1.0911$$

Svar: $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx 1.09$ □

Svagare form av resttermen

$B(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}$ i Lagranges restterm är begränsad i en omgivning av 0 (ty $f^{(n+1)}(x)$ kontinuerlig nära 0).

Lagranges restterm kan då skrivas $R_{n+1}(x) = B(x)x^{n+1}$

För vissa tillämpningar räcker det att skriva Maclaurins formel som

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + B(x)x^{n+1}}$$

där $B(x)$ är begränsad nära $x=0$.

Ex: Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(e^x - 1 - x)}.$$

Lsg.

$\sin x$: $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$

$\Rightarrow f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$

så $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + B_1(x)x^4 =$

$= x - \frac{x^3}{6} + B_1(x)x^4$ B_1 begr. nära 0

e^x: $g(x) = g'(x) = g''(x) = e^x \Rightarrow g(0) = g'(0) = g''(0) = 1$

så $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + B_2(x)x^3$ B_2 begr. nära 0

Vi får

$$\frac{\sin x - x}{x(e^x - 1 - x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + B_1(x)x^4 - x}{x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + B_2(x)x^3 - 1 - x\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + B_1(x)x^4}{\frac{x^3}{2} + B_2(x)x^4} = \frac{-\frac{1}{6} + B_1(x)x}{\frac{1}{2} + B_2(x)x} \to \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

dom. term x^3

då $x \to 0$

ty $B_1(x)x$, $B_2(x)x \to 0$ då $x \to 0$

Exempelvis $0 \le |B_1(x)x| \le Ax \to 0$ då $x \to 0$

så $B_1(x)x \to 0$ då $x \to 0$ (instängning) $\square$

Ex: Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - \ln(1+x^2)}{x^4}$$

Lsg:

$x\sin x$: $x\sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + B_1(x)x^4\right) =$

$= x^2 - \frac{x^4}{6} + B_1(x)x^5$ B_1 begr. nära 0

$\ln(1+x^2)$: $f(x) = \ln(1+x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$\Rightarrow f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$

så $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + B_2(x)x^3$ B_2 begr. nära 0

$$\Rightarrow \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \underbrace{B_2(x^2)}_{=B_3(x)\text{ begr. nära 0}}x^6 = x^2 - \frac{x^4}{2} + B_3(x)x^6$$

ty $x^2 \to 0$ då $x \to 0$

Vi får

$$\frac{x\sin x - \ln(1+x^2)}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 - \frac{x^4}{6} + B_1(x)x^5 - \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + B_3(x)x^6\right)}{x^4} =$$

$$= \frac{\frac{x^4}{3} + \left(B_1(x) - B_3(x)x\right)x^5}{x^4} = \frac{1}{3} + \underbrace{\left(B_1(x) - B_3(x)x\right)}_{\substack{=B_4(x)\\ \text{begr. nära 0}}}x \to \frac{1}{3} \quad \text{då } x \to 0$$

ty $B_4(x)x \to 0$ då $x \to 0$

Vi studerar Maclaurinutvecklingen av e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Låt x vara fixt tal. Då gäller $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \to 0$ då $n \to \infty$

Det följer att

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{för alla reella } x.}$$

Maclaurinserie!

På motsvarande sätt gäller:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}}$$

för alla reella x.

Man kan t.o.m. definiera e^x, $\sin x$ och $\cos x$ med hjälp av dessa serier. Detta är till hjälp om vi (naturligt) vill definiera funktionerna för komplexa tal. Vi definierar t.ex.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \text{ komplext tal.}$$

Ex: Vad är e^{ix} då x reellt tal?

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \dots =$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \cos x + i\sin x \quad (!)$$