Föreläsning 9:

Elementära funktioner: Olika typer av funktioner som historiskt visat sig vara viktiga i tillämpningar.

Polynomfunktioner:

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

Ex: $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^4 - 2x^2 + \sqrt{2}$, $h(x) = -x + 4 \dots$

Rationella funktioner:

$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x), q(x) \text{ polynom}}$$

Ex: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 4}$, $g(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + 1}$

Potenser (repetition): a^α ($a > 0$ bas, α exponent)

Potenslagar:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

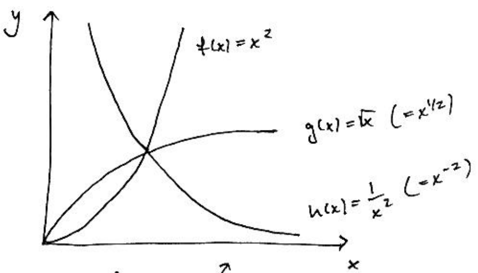
$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha - \beta} \qquad \text{med flera....}$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

(Viktiga att repetera!)

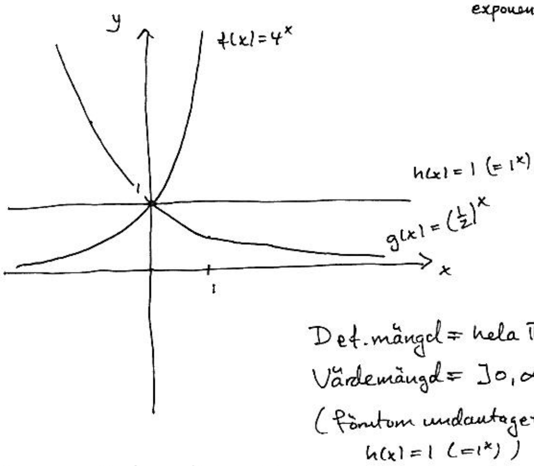
Med potenser kan vi bilda två viktiga typer av funktioner – potensfunktioner och exponentialfunktioner:

Potensfunktioner: $f(x) = x^\alpha$ (bas varierar, exponent fix)



Exempel på potensfunktioner. Normalt är största möjliga definitionsmängd $]0, \infty[$, men beroende på α kan ibland även större definitionsmängd väljas.

Exponentialfunktioner: $f(x) = a^x$ (bas fix, exponent varierar)



Def. mängd = hela $\mathbb{R}$

Värdemängd = $]0, \infty[$

(förutom undantaget $h(x) = 1$ $(= 1^x)$)

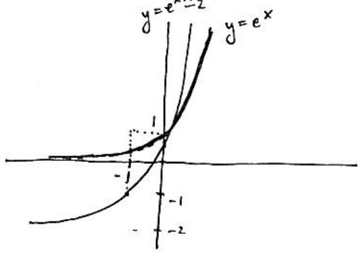
En vanlig bas är talet $e \approx 2.72$ (Eulers tal)

Ex: Skissera grafen till

a) $f(x) = e^{x+1} - 2$

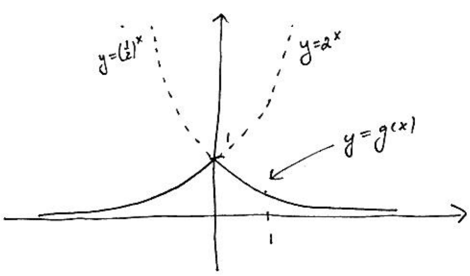
b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

Lösning: a) Grafen $y = e^{x+1} - 2$ är en $y = e^x$-graf flyttad ett steg åt vänster och två steg nedåt.



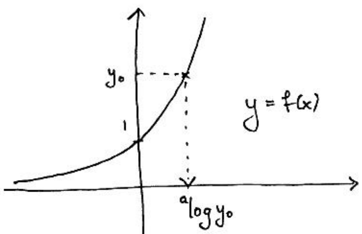
b)

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{då } x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x & \text{då } x < 0 \end{cases}$$



Logaritmfunktionen:

Betrakta $f(x) = a^x$, $a > 0$ (och $a \neq 1$).



Denna funktion är injektiv och vi kan bilda inversen f^{-1}. Inversen kallas a-logaritmen och betecknas $^a\log$.

$$\boxed{^a\log y_0 = \text{"det tal vi ska upphöja a med för att få } y_0\text{"}}$$

Ex: $^3\log 81 = {}^3\log 3^4 = 4$ "stryk"

$^{10}\log \frac{1}{100} = {}^{10}\log 10^{-2} = -2$

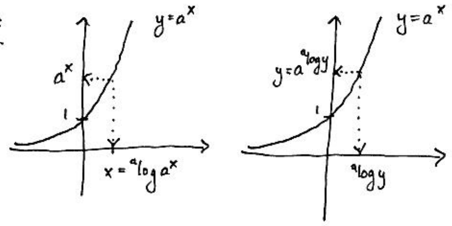
$^2\log 1 = {}^2\log 2^0 = 0$ $\square$

Vanliga baser är $e \approx 2.72$, 10 och 2. Vi har då några speciella beteckningar: "$^e\log = \ln$", "$^{10}\log = \lg$".

Några allmänna egenskaper hos logaritmer:

$$\boxed{^a\log 1 = 0, \quad {}^a\log a^x = x, \quad a^{^a\log x} = x}$$

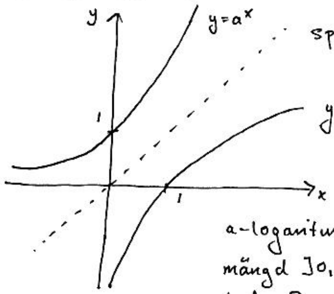
Illustration:



Ex:

$${}^{3}\log 1 = 0, \quad {}^{5}\log 5^{3} = 3, \quad e^{\ln 4} = 4$$

Hur ser grafen till logaritmfunktionen ut?



a-logaritmen har definitionsmängd $]0,\infty[$ och värdemängd hela $\mathbb{R}$.

OBS! Logaritmer är bara definierade för positiva tal. Exempelvis är $\lg(-3)$ odefinierad eftersom ekvationen $10^x = -3$ saknar lösning.

Varje potenslag ger upphov till en motsvarande logaritmlag:

Sats (Logaritmlagar) $(x, y > 0)$

(i) ${}^{a}\log xy = {}^{a}\log x + {}^{a}\log y$

(ii) ${}^{a}\log \frac{x}{y} = {}^{a}\log x - {}^{a}\log y$

(iii) ${}^{a}\log x^{y} = y\,{}^{a}\log x \quad (y \in \mathbb{R}$ tillåtet$)$

Bevis:

(i): $${}^{a}\log xy = {}^{a}\log\left(a^{{}^{a}\log x} \cdot a^{{}^{a}\log y}\right) \overset{\text{potenslag}}{=} {}^{a}\log a^{{}^{a}\log x + {}^{a}\log y} = {}^{a}\log x + {}^{a}\log y$$

(ii): $${}^{a}\log \frac{x}{y} = {}^{a}\log \frac{a^{{}^{a}\log x}}{a^{{}^{a}\log y}} \overset{\text{p.lag}}{=} {}^{a}\log a^{{}^{a}\log x - {}^{a}\log y} = {}^{a}\log x - {}^{a}\log y$$

(iii): $${}^{a}\log x^{y} = {}^{a}\log\left(a^{{}^{a}\log x}\right)^{y} \overset{\text{p.lag}}{=} {}^{a}\log a^{y\,{}^{a}\log x} = y\,{}^{a}\log x \quad \square$$

Ex: $${}^{5}\log 10 - {}^{3}\log 2 \cdot {}^{5}\log 3 \overset{(iii)}{=} {}^{5}\log 10 - {}^{5}\log 3^{{}^{3}\log 2} =$$
$$= {}^{5}\log 10 - {}^{5}\log 2 \overset{(ii)}{=} {}^{5}\log \frac{10}{2} = {}^{5}\log 5 =$$
$$= {}^{5}\log 5^{1} = 1 \quad \square$$

Ex: Lös ekvationen $2\ln x = \ln(x+2)$!

$$2\ln x = \ln(x+2) \overset{*)}{\Longrightarrow} \ln x^{2} = \ln(x+2)$$
$$\Longleftrightarrow e^{\ln x^{2}} = e^{\ln(x+2)} \Longleftrightarrow x^{2} = x+2 \Longleftrightarrow$$

$$x^{2} - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \text{ eller } x = -1.$$

Kolla rötter! $x = -1$ falsk rot ($\ln(-1)$ ej definierat)

Svar: $x = 2$ (*) ej ekvivalens)

Kolla alltid dina rötter när du har använt logaritmlagar i ekv. lösningen.

Ex: Lös ekvationen $3^{x^{2}} = 9^{x}$!

Logaritmer behövs ej här. Omskrivning av bas ger

$$3^{x^{2}} = 9^{x} \Longleftrightarrow 3^{x^{2}} = (3^{2})^{x} \Longleftrightarrow 3^{x^{2}} = 3^{2x}$$
$$\Longleftrightarrow x^{2} = 2x \Longleftrightarrow x^{2} - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = 2$$

Svar: $x = 0$ eller $x = 2$

Ex: Lös ekvationen $4^{x^{2}} = 9^{x}$!

Här får vi utnyttja logaritmer:

$$4^{x^{2}} = 9^{x} \Longleftrightarrow {}^{4}\log 4^{x^{2}} = {}^{4}\log 9^{x}$$
$$\Longleftrightarrow x^{2} = x \cdot {}^{4}\log 9 \Longleftrightarrow x^{2} - x \cdot {}^{4}\log 9 = 0$$
$$\Longleftrightarrow x\left(x - {}^{4}\log 9\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = {}^{4}\log 9$$

Svar: $x = 0$ eller $x = {}^{4}\log 9$.

Alt. lösning: $$4^{x^{2}} = 9^{x} \Longleftrightarrow \ln 4^{x^{2}} = \ln 9^{x}$$
$$\Longleftrightarrow x^{2}\ln 4 = x\ln 9 \Longleftrightarrow x^{2}\ln 4 - x\ln 9 = 0$$
$$\Longleftrightarrow \ln 4\, x\left(x - \frac{\ln 9}{\ln 4}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \frac{\ln 9}{\ln 4}.$$

Anm: Tydligen är ${}^{4}\log 9 = \frac{\ln 9}{\ln 4}$ (?)

Basbyte hos logaritmer:

Ex: Uttryck ${}^{5}\log x$ i ${}^{2}\log x$!

$${}^{5}\log x = {}^{5}\log 2^{{}^{2}\log x} = {}^{2}\log x \cdot {}^{5}\log 2.$$ konstant!

Alt: $${}^{2}\log x = {}^{2}\log 5^{{}^{5}\log x} = {}^{5}\log x \cdot {}^{2}\log 5$$
$$\Longrightarrow {}^{5}\log x = \frac{{}^{2}\log x}{{}^{2}\log 5}$$ konstant!

Logaritmer i olika baser är proportionella!

Ex: Vi ser att

$$\ln 9 = \ln 4^{{}^{4}\log 9} = {}^{4}\log 9 \cdot \ln 4 \Longrightarrow {}^{4}\log 9 = \frac{\ln 9}{\ln 4} \; !$$

Oftast brukar man därför använda endast den naturliga logaritmen "ln".