Föreläsning 12:

(1)

Summor:

Summabeteckning:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ex: $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} k^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2 = 4+9+16+25 = 54$

Aritmetisk summa:

Vad blir $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k = 1+2+3+\cdots+99+100$?

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & + 2 & + 3 & + 4 & + \cdots & + 99 & + 100 & \\ 100 & + 99 & + 98 & + 97 & + \cdots & + 2 & + 1 & \\ \hline 101 & + 101 & + 101 & + 101 & + \cdots & + 101 & + 101 & (100 \text{ st.}) \end{array}$$

Summan är $\dfrac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.

Allmän formel:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Bevis: Kopiera proceduren ovan! □

(2)

Geometrisk summa:

Låt x vara ett fixt tal.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1)}$$

Bevis: $\begin{cases} S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n \\ xS = \phantom{1 + {}} x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1} \end{cases}$

$\Rightarrow \; xS - S = x^{n+1} - 1 \iff S(x-1) = x^{n+1} - 1$

$\iff S = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad x \neq 1.$ □

Ex: $5 + 15 + 45 + 135 = 5\cdot 1 + 5\cdot 3 + 5\cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 =$

$= 5(1 + 3 + 3^2 + 3^3) = 5 \cdot \dfrac{3^4 - 1}{3-1} = 200.$

Binomialsatsen:

$$\boxed{\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x+y)^n &= \,? \qquad \text{Formel?} \end{aligned}}$$

(3)

Def (fakultet): $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Ex: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Anm: $0! \overset{\text{def}}{=} 1$

Ex: På hur många sätt kan man välja 4 st objekt ur en mängd av 9 objekt, om ordningen i vilken dessa väljs spelar roll?

9 personer

1:a personen	9 olika val
2:a — " —	8 — " —
3:e — " —	7 — " —
4:e — " —	6 — " —

Antal sätt $= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$

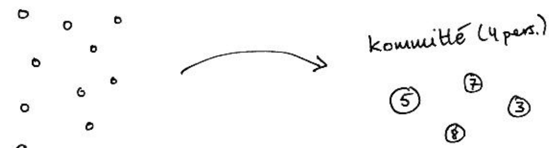
$= \dfrac{9!}{5!} = \dfrac{9!}{(9-4)!} = 3024$

personer — personer — val

$$\boxed{\text{Formel: } \frac{n!}{(n-k)!}}$$

(4)

Ex: På hur många sätt kan man välja 4 st. objekt ur en mängd med 9 objekt, om ordningen inte spelar någon roll?



9 personer

4 personer väljs på $\dfrac{9!}{(9-4)!}$ sätt om ordningen spelar roll!

4 personer kan ordnas på $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ olika sätt. Måste dela med $4!$

Antal val $= \dfrac{9!}{(9-4)!\,4!} = \dfrac{9!}{5!\,4!} = 126$

$$\boxed{\text{Formel: } \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

$$\boxed{\text{Def: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \text{"n över k"}}$$

Ex: På en fest med hundra personer skakar alla hand med alla. Hur många handskakningar blir det totalt? (5)

Lösning: Antalet sätt att välja 2 personer av 100 (utan hänsyn till ordning) är

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{98!\,2!} = \frac{100\cdot 99}{2} = 4950.$$

Ex: Hur många lottorader finns det?

Lösning: Vi väljer 7 nr av 35:

$$\binom{35}{7} = \frac{35!}{28!\,7!} = 6\,724\,520.$$

Binomialsatsen:

Hur räknar man ut $(x+y)^3$?

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) =$$

$$= x^3 + \underbrace{x^2y + xyx + yx^2} + \underbrace{xy^2 + yxy + y^2x} + y^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Koefficienten framför t.ex. x^2y är antalet sätt att välja 1 st y (och därmed 2 st x) ur tre parenteser, dvs. $\binom{3}{1} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$.

Med detta resonemang:

(6)

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 =$$

$$= 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2y + 3\cdot xy^2 + 1\cdot y^3$$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 =$$

$$= 1\cdot x^4 + 4\cdot x^3y + 6\cdot x^2y^2 + 4\cdot xy^3 + 1\cdot y^4$$

Binomialsatsen:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

Ex: Vad blir koefficienten framför x^{18} i utvecklingen av $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{15}$?

Lösning:

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{15} = \binom{15}{0}(x^2)^{15} + \binom{15}{1}(x^2)^{14}\cdot\frac{2}{x} + \binom{15}{2}(x^2)^{13}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \binom{15}{k}(x^2)^{15-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k + \cdots + \binom{15}{15}\left(\frac{2}{x}\right)^{15}$$

En godtycklig term har formen

(7)

$$\binom{15}{k}(x^2)^{15-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k = \binom{15}{k}\frac{x^{2(15-k)}\cdot 2^k}{x^k} =$$

$$= \binom{15}{k}x^{30-2k-k}\cdot 2^k = \binom{15}{k}2^k x^{30-3k}$$

För att få x^{18} krävs att $30-3k=18 \iff k=4$.

Koeff. blir $\binom{15}{4}\cdot 2^4 = \frac{15!}{4!\cdot 11!}\cdot 2^4 =$

$$= \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^4 = 21840.$$ Svar: 21840

Pascals triangel:

Sats: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Vi konstruerar nu en triangel med binomialkoefficienter på följande sätt:

$\binom{4}{1} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1}$ enl. sats

$$\binom{0}{0} \quad \leftarrow \text{rad } 0$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \quad \leftarrow \text{rad } 3$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

(8)

Koefficienterna på rad n är nu binomialkoeff. i utvecklingen av $(x+y)^n$.

Ex: Beräkna $(x+3)^4$!

Vi läser av koeff. på den indikerade raden

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \quad \leftarrow$$

$$(x+3)^4 = 1\cdot x^4 + 4\cdot x^3\cdot 3^1 + 6\cdot x^2\cdot 3^2 + 4\cdot x\cdot 3^3 + 1\cdot 3^4 =$$

$$= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

Ex: Visa att

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} =$$

$$= \binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot 1^0 + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + \binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot 1^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^0\cdot 1^n =$$

$$= (1+1)^n = 2^n \qquad \square$$