

Föreläsning 1


(1)

Matematiskt språk:

Påståenden:

- Lund ligger i Skåne Saut
- Oslo är Danmarks huvudstad Falskt
- Teknologen X klarade tentan Saut/Falskt
- Påståenden är sanna eller falska.

Påståenden i matematiken:

-  $a^2 + b^2 = c^2$ Saut (Sats)
- $\sqrt{2}$ är ett rationellt tal (=heltalsbråk) Falskt ($\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$, a,b heltal)
- $x + 6 = 8$ Saut/Falskt (ekvation)
- $x^2 + 2x + 5$ ej påstående, uttryck

Implikation och ekvivalens:

(2)

- Fido är en tax \Rightarrow Fido är en hund
implikation (\Leftarrow gäller ej)
- x är ett rationellt tal \Leftarrow x är ett heltal
- OBS! Om x heltal, följer att $x = \frac{x}{1}$ (heltalsbråk). Alltså är x ett rationellt tal. (\Rightarrow gäller ej)

$$x + 6 = 8 \Rightarrow x = 2$$

ekvivalens, skrivs \Leftrightarrow

- $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$
- Observera att \Leftarrow ej gäller. Exempelvis $(-1)^2 = 1^2$ men $-1 \neq 1$.

$A \Rightarrow B$ betyder: Om A är sant, så är B sant.
 $A \Leftrightarrow B$ - " - : A är sant precis då B är sant

Algebra

(3)

Ex (bräkning): Förenkla!

$$\begin{aligned} \frac{7}{10} - \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{5}{6}} + \frac{4}{9} &= \frac{7}{10} - \frac{\frac{8}{9}}{\frac{5}{6}} + \frac{4}{9} = \\ &= \frac{7}{10} - \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{5} + \frac{4}{9} = \frac{7}{10} - \frac{16}{15} + \frac{4}{9} = \\ &= \frac{7 \cdot 9}{10 \cdot 9} - \frac{16 \cdot 6}{15 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{63}{90} - \frac{96}{90} + \frac{40}{90} = \\ &= \frac{63 - 96 + 40}{90} = \frac{7}{90} \end{aligned}$$

10 = 2 · 5
15 = 3 · 5
9 = 3 · 3
så MGN = 2 · 3 · 3 · 5 = 90

Ex: Förenkla!

$$\begin{aligned} (x-4)(x+2) + (x+2)(x-2) - (x+2)^2 &= \\ = x^2 + 2x - 4x - 8 + x^2 - 2^2 - (x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2) &= \\ = 2x^2 - 2x - 12 - (x^2 + 4x + 4) = 2x^2 - 2x - 12 - x^2 - 4x - 4 &= \\ = x^2 - 6x - 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 && \text{(konjugatregeln)} \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(kvadreringsregeln)} \end{aligned}$$

alt. $(x-4)(x+2) + (x+2)(x-2) - (x+2)^2 =$ (4)

$$\begin{aligned} &= (x+2) \left(x-4 + x-2 - (x+2) \right) \\ &\text{bytt ut } x+2 \\ &= (x+2)(x-8) = x^2 - 8x + 2x - 16 \\ &= x^2 - 6x - 16 \end{aligned}$$

Kvadratrötter:

Ex: $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, men $\sqrt{-9}$ ej def.

Def: Kvadratroten ur $a \geq 0$ definieras som det icke-negativa tal x som uppfyller $x^2 = a$.

OBS! $3^2 = (-3)^2 = 9$, men $\sqrt{9} = 3$.
(spec. $\sqrt{9} \neq -3$, $\sqrt{9} \neq \pm 3$)

Ex: Förenkla!

$$\begin{aligned} \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} + \sqrt{\frac{21}{7}} &= \sqrt{5 \cdot 15} + \sqrt{\frac{21}{7}} = \sqrt{75} + \sqrt{3} = \\ &= \sqrt{5^2 \cdot 3} + \sqrt{3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Ex: Skriv utan rottecken i nämnaren! (5)

$$\frac{5}{2-\sqrt{3}} = \frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{10+5\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{10+5\sqrt{3}}{1} = 10+5\sqrt{3}$$

förläng med konjugatuttrycket

Potenser: a^b
 a ← bas
 b ← exponent

Ex: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{32}$$

$$5^0 = 1 \quad (\text{lämplig definition})$$

Ex: Förenkla!

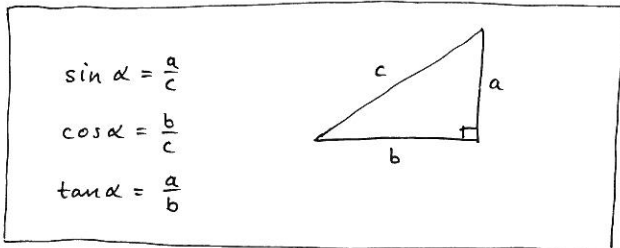
$$\frac{(xy^2)^3 \cdot x^4 y^{-2}}{x^2 y} = x^3 (y^2)^3 \cdot x^4 y^{-2} \cdot y^{-2-1} = x^3 y^{2 \cdot 3} \cdot x^4 y^{-3} = x^{3+4} y^{6-3} = x^7 y^3$$

Ex: $27^{1/3} = 3$, ty $3^3 = 27$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ty } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Anm: $\sqrt{a} = a^{1/2}$

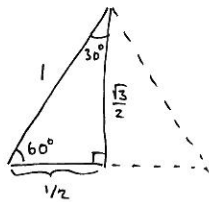
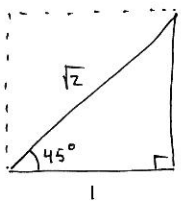
Trigonometri (repetition) (7)



"standardvinklar":

(Halv kvadrat)

(Halv liksidig triangel)



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Viktiga!

Potenslagar: (Viktiga!) (6)

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

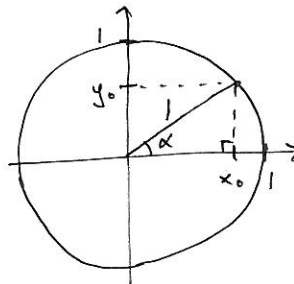
$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Se även s. 21 i läroboken!

Sin, cos, tan för vinklar utanför $0 < \alpha < 90^\circ$: (8)

Euhetscirkeln!

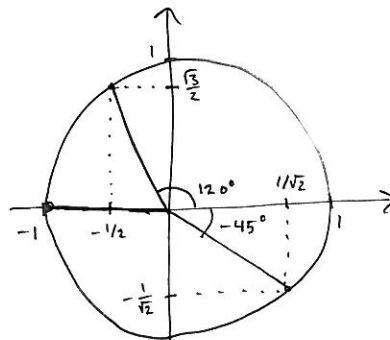


$$\cos \alpha = x_0$$

$$\sin \alpha = y_0$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(= \frac{y_0}{x_0} \right)$$

Ex:



$$\cos 120^\circ = -1/2$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$\cos(-45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$

$$\sin(-45^\circ) = -1/\sqrt{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$$

$$\tan 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\tan(-45^\circ) = \frac{\sin(-45^\circ)}{\cos(-45^\circ)} = \frac{-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -1$$