

# Instuderingsfrågor för Endimensionell analys – delkurs A1

Reviderade aug 2012

## Anvisningar

Avsikten med följande frågor är att hjälpa dig med självkontroll av dina kunskaper. Om du känner dig osäker på svaren bör du slå upp motsvarande avsnitt i läroböckerna och läsa på ytterligare en gång. Många frågor börjar med orden ”Vad menas med att”. Denna fras betyder precis detsamma som frasen ”Ge definitionen av att”. Kontrollera gärna med övningsledare och föreläsare om dina svar på frågorna kan anses vara tillfredsställande.

## Kapitel 1

1. Vilka talmängder betecknas med  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  och  $\mathbb{R}$ ?
2. Vad betyder tecknen  $\in$ ,  $\subseteq$ ,  $\emptyset$ ,  $\Rightarrow$  respektive  $\Leftrightarrow$ ?
3. Varför kan symbolerna  $\Rightarrow$  och  $\Leftrightarrow$  inte användas mellan två uttryck?

## Kapitel 2

4. Hur adderas, multipliceras och divideras bråk?
5. Vad menas med kvadratkomplettering? Kan alla andragradspolynom, t.ex. även  $x^2$ , kvadratkompletteras?
6. Skriv upp formeln för polynomdivision,  $\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$ , och använd denna för att bevisa faktorsatsen.

## Kapitel P

7. Vad är det för skillnad mellan ett axiom, en definition och en sats?
8. Vad menas med parallella linjer i planet?
9. Visa att vertikalkvinklar är lika stora.
10. Formulera ett axiom som handlar om linjer och vinklar.
11. Vad menas med kongruenta trianglar? Formulera kongruensaxiomen.
12. Vad är vinkelsumman i en triangel respektive fyrhörning? Ge bevis.
13. Formulera och bevisa yttervinkelsatsen.
14. Definiera följande: cirkel, parallelogram, romb, parallelltrapets, rektangel och kvadrat.
15. Visa att varje rektangel är en parallelogram och att varje romb är en parallelogram.
16. Formulera och bevisa parallelogramsatsen.
17. Visa att diagonalerna i en parallelogram delar varandra mitt itu.

18. Formulera och bevisa satsen om en likbent triangel samt basvinkelsatsen.
19. Vad menas med en sluten polygon och hur kan man beräkna arean av området innanför en sådan?
20. Bevisa formler för triangelns, parallelogrammens samt parallelltrapetsets area.
21. Formulera och bevisa Pythagoras sats.
22. Om hypotenusan och en katet i en rätvinklig triangel är lika med motsvarande sidor i en annan, hur kan man då dra slutsatsen att de två trianglarna är kongruenta?
23. Formulera och bevisa omvändningen till Pythagoras sats. (Det finns ytterligare ett bevis bland övningarna. Välj själv det du tycker är enklast.)
24. Formulera transversalsatsen.
25. Vad menas med att två trianglar är likformiga?
26. Formulera topptrianglesatsen.
27. Formulera bisektrissatsen.
28. Formulera alla likformighetsfallen.
29. Formulera och bevisa randvinkelsatsen samt två omedelbara följder av denna.
30. Definiera en tangent till en cirkel och ange en viktig egenskap hos denna.

### Kapitel 3

31. Vad är skillnaden mellan en ekvation och ett uttryck? Ge exempel.
32. Vad menas med att två ekvationer är ekvivalenta?
33. Vad kan man göra med en ekvation, om man vill få en ny ekvivalent ekvation? Ge tre exempel på operationer där en ny ekvation uppstår, som inte säkert är ekvivalent med den ursprungliga.
34. Härled lösningsformeln för andragradsekvationen  $x^2 + px + q = 0$ .
35. Hur angriper du olikheter som innehåller polynom och kvoter av polynom?

### Kapitel 4

36. Vad karakteriserar en aritmetisk summa? Hur beräknar man en sådan?
37. Skriv upp och härled formeln för en geometrisk summa.
38. Definiera  $n!$  samt  $\binom{n}{k}$ . Vad är  $\binom{n}{0}$  och  $\binom{n}{1}$ ?
39. Skriv  $(a + b)^5$  som en summa. Skriv upp den allmänna binomialsatsen.
40. Skriv upp Pascals triangel till och med  $n = 6$ .

41. Vad karakteriserar en geometrisk talföljd?

## Kapitel A och 5

42. Definiera begreppet riktningskoefficient för en linje i planet. Vilka värden kan den anta?

43. Hur får man fram en ekvation för en rät linje a) om man känner riktningskoefficienten och en punkt på linjen; b) om man känner två punkter på linjen?

44. Hur får man fram ekvationen för normalen till en linje i en given punkt på linjen?

45. Ange en ekvation för en parabel med symmetrilinje parallell med  $x$ -axeln och vertex i  $(x_0, y_0)$ , som ligger a) till höger och b) till vänster om linjen  $x = x_0$  i  $xy$ -planet.

46. Definiera vad som menas med "absolutbeloppet av ett reellt tal".

47. Skriv upp formler för avståndet mellan två punkter dels på tallinjen, dels i planet.

48. Härled cirkelns ekvation.

49. Skriv upp en ekvation för en ellips med halvaxlarna  $a$  och  $b$  och medelpunkten  $(x_0, y_0)$  samt rita en figur.

50. Ange en ekvation för en hyperbel samt ange dess asymptoter. Rita hyperbeln och asymptoterna i en figur och sätt ut skärningarna med koordinataxlarna. Vad händer om  $x$  och  $y$  byter plats i ekvationen?

51. Ange asymptoterna till hyperbeln  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

## Kapitel 7

52. Beskriv vad som menas med en funktion samt funktionens definitionsmängd och värdemängd.

53. Låt  $f$  vara en funktion vars definitionsmängd och värdemängd är delmängder av  $\mathbb{R}$ . Vad menas med grafen av  $f$ ?

54. Vad menas med inversen  $f^{-1}$  till en funktion  $f$ ? Har alla funktioner en invers? Ange ett tillräckligt villkor för att det ska finnas en invers.

55. Definiera begreppen växande och strängt växande funktion.

56. Ge exempel på en funktion i intervallet  $1 \leq x < \infty$  som är både strängt växande och uppåt begränsad.

57. Definiera begreppen jämn respektive udda funktion.

58. Ge tre exempel på jämna funktioner och tre exempel på udda funktioner.

## Kapitel 8.1–8.3

59. Rita graferna till  $f(x) = e^{\alpha x}$  och  $f(x) = x^\alpha$  för några olika  $\alpha$ . Rita graferna till  $f(x) = \ln x$  och  $f(x) = \ln |x|$ .

60. Bevisa logaritmlagarna med utgångspunkt från potenslagarna.

61. Kontrollera att Du kan de olika lagarna för potenser och logaritmer genom att skriva om

$$a^\alpha a^\beta = \quad , \quad (a^\alpha)^\beta = \quad , \quad a^\alpha b^\alpha = \quad ,$$
$${}^a \log st = \quad , \quad {}^a \log \frac{s}{t} = \quad , \quad {}^a \log s^t = \quad .$$

62. Uttryck  ${}^a \log x$  med hjälp av  $\ln x$ .

## Kapitel T och 8.4

63. Definiera de trigonometriska funktionerna, dels i specialfallet av en rätvinklig triangel, dels generellt via enhetscirkeln.

64. Visa trigonometriska ettan.

65. Använd enhetscirkeln och kongruenta trianglar för att visa formler för  $\sin(-\alpha)$ ,  $\sin(90^\circ - \alpha)$ ,  $\sin(180^\circ - \alpha)$  samt motsvarande formler för cosinus.

66. Formulera och bevisa areasatsen.

67. Formulera och bevisa sinussatsen.

68. Formulera och bevisa cosinussatsen.

69. Hur definieras vinkelmåttet radian?

70. Rita graferna till funktionerna  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  och  $\cot x$ .

71. Illustrera dubbelolikheten  $\sin x < x < \tan x$  då  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

72. Skriv upp de trigonometriska additionsformlerna. Ange formler för dubbla vinkeln för sinus respektive cosinus. Ge bevis.

73. Redogör för hjälpvinkelmetoden vid behandling av uttryck av formen  $a \sin \omega x + b \cos \omega x$ .

74. Givet radien i en cirkel, skriv upp formler för dess omkrets respektive area.

75. Ange sambandet mellan båglängd, vinkel och radie för en cirkelsektor, dels då vinkeln mäts i grader, dels i radianer.

76. Givet radien och båglängden för en cirkelsektor, ange dess area.

## Kapitel 8.5

77. Definiera funktionerna  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  och  $\arctan x$ . Ange deras definitions- och värdemängder.

78. Rita graferna till funktionerna  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  och  $\arctan x$ .