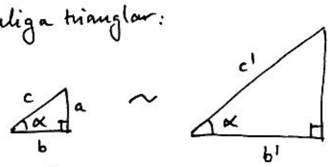
Föreläsning 10

Grundläggande trigonometri:

Rätvinkliga trianglar:



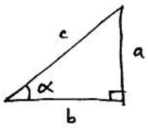
enligt likformighetsfall VV.

Det betyder att kvoterna $\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$ och $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$, och dessa kvoter beror bara av vinkeln α.

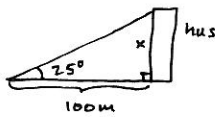
Definition: Vi sätter

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$,

$\tan\alpha=\frac{a}{b}$, $\cot\alpha=\frac{b}{a}$



Ex: Vi vill bestämma höjden av ett hus.

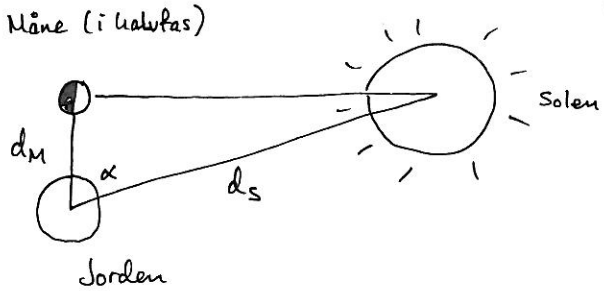


$$\tan 25^\circ=\frac{x}{100} \iff x=100\cdot\tan 25^\circ \approx 100\cdot 0.47 = 47\text{ m}$$

Ex: Hur stort är avståndet till solen?

Aristarchus ~ 300 f.kr.

Måne (i halvfas)



Vinkeln α uppmättes till 87°

$$\cos 87^\circ=\frac{d_M}{d_S} \iff d_S=\frac{d_M}{\cos 87^\circ}\approx\frac{d_M}{0.052}\approx 19\cdot d_M,$$

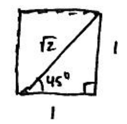
dvs. ca 20 ggr avståndet till månen. (Korrekt svar, $\alpha\approx 89.95^\circ$, $d_S\approx 400 d_M$)

Hur vet man vad tan 25°, cos 87° är?

- tabell, räknare
- approximativa metoder

För vissa speciella vinklar kan man ta fram exakta värden (ska kunnas!)

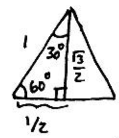
Ex: Halv kvadrat



$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ=\cot 45^\circ=1$

Halv liksidig triangel

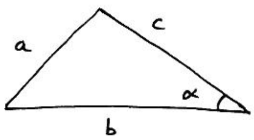


$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ=1/2$ $\quad\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

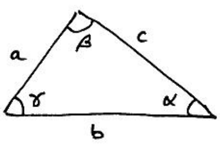
Repetera Areasatsen, sinussatsen, cosinussatsen (T.3-T.4):

Sats (Areasatsen):



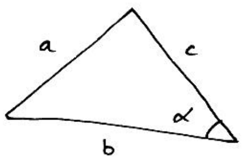
$$\text{Area}=\frac{bc\cdot\sin\alpha}{2}$$

Sats (Sinussatsen):



$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

Sats (Cosinussatsen):



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Läs bevisen själva!

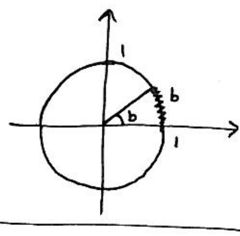
Trigonometriska funktioner:

Ett (som det kommer att visa sig) bättre vinkelmått i stället för grader är radianer.

Definition (radianer)

Utgå från enhetscirkeln.

Om cirkelbågens längd är b, så sätter vi vinkeln till b radianer.



Observation: $360^\circ = 2\pi$ radianer

Ex: $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ radianer, $30^\circ=\frac{\pi}{6}$ radianer,

$180^\circ=\pi$ radianer, $540^\circ=360^\circ+180^\circ=2\pi+\pi$ rad. $=3\pi$ rad.

$-60^\circ=-\frac{\pi}{3}$ radianer osv.

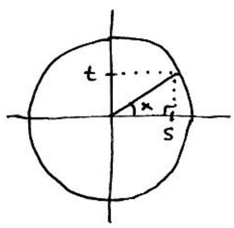
Definition (Trig. funktioner) (x i radianer)

$\cos x = s$

$\sin x = t$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

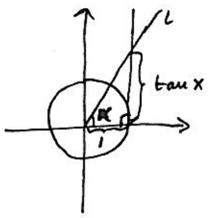
$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$



Anm1: För $\tan x$ måste $\cos x\neq 0$, och för $\cot x$ måste $\sin x\neq 0$.

Anm 2: $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, då $\tan x \neq 0$

• Hur kan man tolka $\tan x$ geometriskt?



$\tan x$ anger linjen L:s lutning.

• Observera att $\cos x$ och $\sin x$ är 2π-periodiska, dvs.

$\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, k heltal

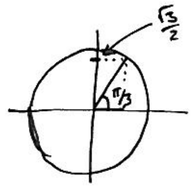
$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, — " —

På motsvarande sätt är $\tan x$ och $\cot x$ π-periodiska.

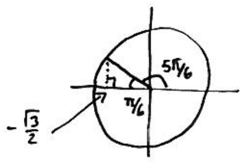
Ex: Beräkna a) $\sin\frac{\pi}{3}$ b) $\cos\frac{5\pi}{6}$ c) $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$!

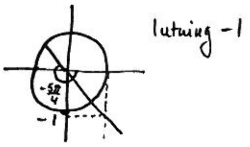
Rita enhetscirkel!

a) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



b) $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -1$



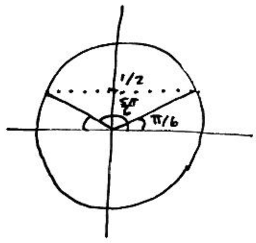


Ex: Bestäm alla vinklar x som uppfyller

$\sin x = \frac{1}{2}$!

Svar: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ \text{eller} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$

där k heltal

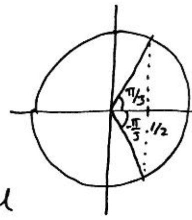


Ex: Bestäm alla vinklar x som uppfyller

$\cos x = \frac{1}{2}$!

Svar: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases}$

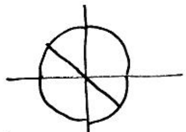
alt. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, k heltal



Ex: Bestäm alla vinklar x som uppfyller

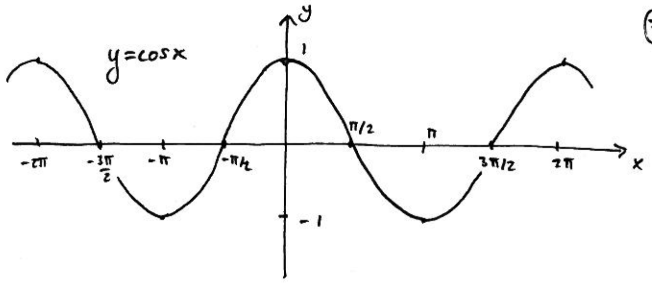
$\tan x = -1$!

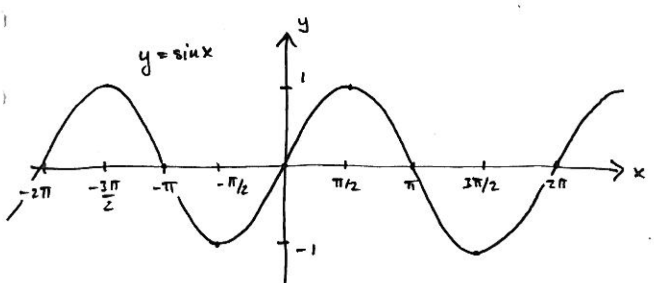
OBS! Lutning -1.

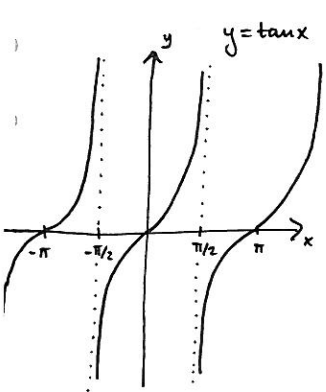


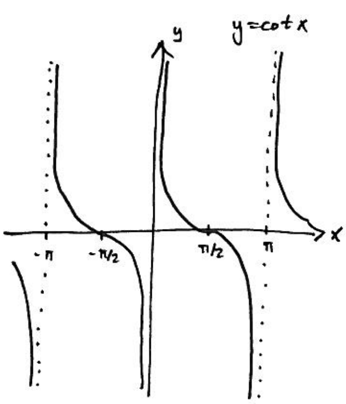
Svar: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, k heltal.

Hur ser funktionsgraferna ut?









Anm 1: cos och sin är fasförskjutna $\frac{\pi}{2}$ rad.

Anm 2: $f(x) = \cos x$ är en jämn funktion, dvs.

$\cos(-x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \sin x$ är en udda funktion, dvs.

$\sin(-x) = \sin x$

Både $\tan x$ och $\cot x$ är udda.

Area av en cirkelsektor:

$$\text{Area} = \pi r^2 \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x r^2}{2}$$

Om $r=1$ (enhetscirkel) blir formeln Area $= \frac{x}{2}$

Sats: Om x mäts i radianer och $0 < x < \pi/2$, så är

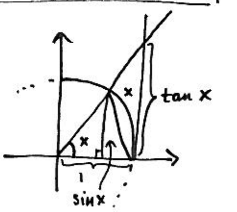
$$\sin x < x < \tan x$$

Bevis: Enhetscirkel

Area (liten triangel) $= \frac{1 \cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$

Area (cirkelsektor) $= \frac{x}{2}$

Area (stor triangel) $= \frac{1 \cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$



Från figur $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Rightarrow \sin x < x < \tan x$ □

Anm: $\sin x \approx x$ då x litet (i radianer!)