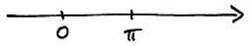
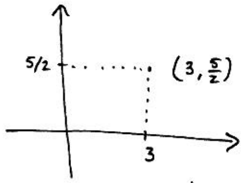
Föreläsning 6

Analytisk geometri

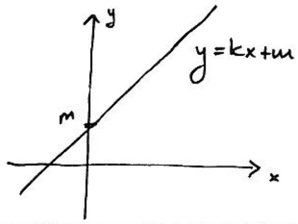


tallinje



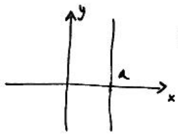
koordinatsystem för planet

Räta linjer:



- k kallas riktningskoefficient (anger lutningen)
- m anger skärningen med y-axeln.

Anm: Lodräta linjer kan inte skrivas på formen $y=kx+m$



Ekvation: $x=a$

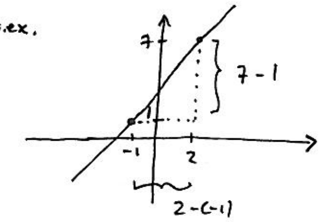
Ex: Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkterna $(-1,1)$ och $(2,7)$!

$$k = \frac{7-1}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2x+m$$

Sätt in en punkt, t.ex. $(-1,1)$ i ekvationen:

$1 = 2(-1)+m \iff$

$m = 1-(-2) = 3$



Svar: $y = 2x+3$

(alt. $2x-y+3=0$; kallas abc-form) □

Anm: Om (x,y) och (x_1,y_1) punkter på linjen gäller

$$k = \frac{y-y_1}{x-x_1} \quad \text{(se ovan!)} \iff \boxed{y-y_1 = k(x-x_1)}$$

kallas enpunktsformeln.

Ex: Ligger punkten $(-1,3)$ på linjen $y=2x+3$?

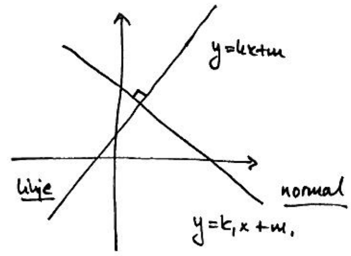
Vi kollar: $3 = 2\cdot(-1)+3 \iff 3=1$ Nej!

Linjens ekvation är det villkor som avgör om punkten (x,y) ligger på linjen.

Normal till en linje:

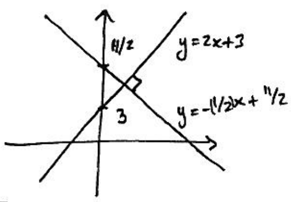
Riktn.koeff. k_1 för normalen ges av

$$k_1 = -\frac{1}{k}.$$



Ex: Normalen till $y=2x+3$ genom punkten $(1,5)$ har riktn.koeff. $k_1 = -\frac{1}{2}$. Enpunktsformeln ger ekvationen $y-5 = -\frac{1}{2}(x-1) \iff y = 5-\frac{1}{2}(x-1)$

$\iff y = -\frac{1}{2}x + 11/2$



Parabler:

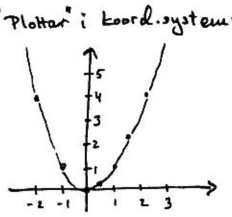
Vi betraktar ekvationen $y=x^2$.

Vilka punkter (x,y) i planet uppfyller detta villkor?

Vi testar:

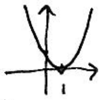
x	y
-2	4
-1	1
0	0
1/2	1/4
1	1
3/2	9/4
2	4
3	9

"Plottar" i koord.system:



Ritar vi ut alla punkter får vi en sammanhängande kurva. Kurvan ovan kallas parabel.

Ex: Skissera kurvan $y = x^2-2x+1$!



Kvadratkomplettering ger $y=(x-1)^2$. Detta är en $y=x^2$-kurva flyttad ett steg åt höger:

Ex: Skissera kurvan $x^2+4x+5-y=0$!

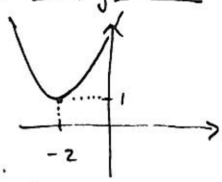
$x^2+4x+5-y=0 \iff y = x^2+4x+5$

kvad.kompl.

$\iff y = (x+2)^2+1$ ← ett steg upp

två steg åt vänster

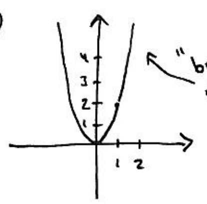
Detta är en $y=x^2$-kurva flyttad två steg åt vänster och ett steg uppåt.



Ex: Skissera kurvorna

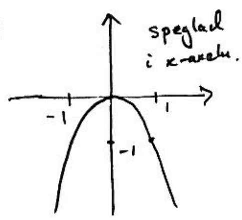
a) $y=2x^2$ b) $y=-x^2$

a)



"brantare" faktor 2

b)

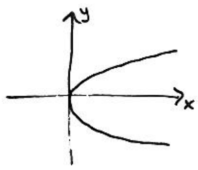


speglad i x-axeln.

Ex: Skissera kurvan $y^2-x=0$!

$y^2-x=0 \iff x=y^2$

Parabel "vriden 90°"



Ex: Bestäm skärningen mellan parabeln $y = x^2+8x-12$ och linjen $y = 2x+4$!

> Anm: Skärningen betyder alla punkter (x,y) som både ligger på parabeln och linjen, dvs. vi vill bestämma alla (x,y) som uppfyller båda ekvationerna samtidigt.

Lös ekv.systemet
$$\begin{cases} y = x^2+8x-12 \\ y = 2x+4 \end{cases}$$

Vi ser att $x^2+8x-12 = 2x+4 \iff x^2+6x-16=0$

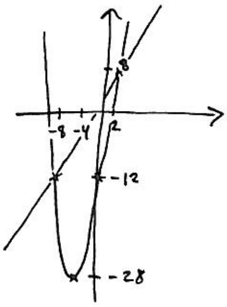
$\iff x=2$ eller $x=-8$

Sätt in $x=2$ resp. $x=-8$ i någon ekvation ovan och bestäm y-värdena!

$x=2$ ger $y = 2\cdot 2+4 = 8$

$x=-8$ ger $y = 2\cdot(-8)+4 = -12$

Svar: Skärningspunkter $(2,8)$ och $(-8,-12)$

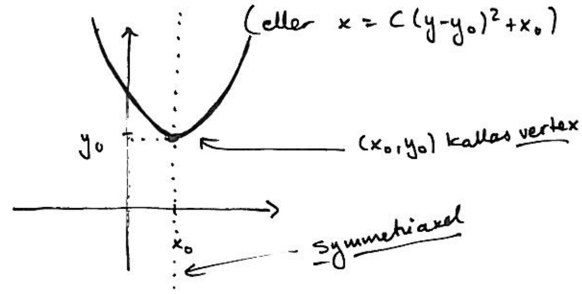


(OBS! $y = x^2+8x-12 = (x+4)^2-28$)

Parabler – sammanfattning (6)

Parabelns ekvation: $y = C(x-x_0)^2+y_0$

(eller $x = C(y-y_0)^2+x_0$)



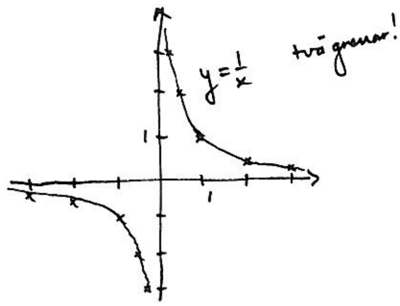
- "Förflyttningsregler" för parabler gäller även för andra kurvor.

Ex: Skissera kurvorna a) $y = \frac{1}{x}$

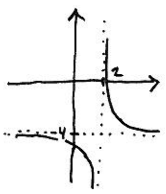
b) $y = \frac{1}{x-2} - 4$

a)

x	y
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
-1/4	-4
0	~~∄~~
1/4	4
1/2	2
1	1
2	1/2

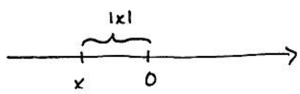


b) Kurvan $y = \frac{1}{x}$ flyttad två steg åt höger och fyra steg nedåt. (7)



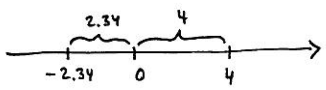
Absolutbelopp och avstånd på tallinjen:

Geometrisk tolkning:



$|x|$ = "avstånd från x till origo på tallinjen"

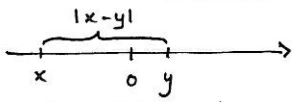
Ex: $|4| = 4$, $|-2.34| = 2.34$, $|0| = 0$



□

> Absolutbeloppet "plockar bort" ett eventuellt minustecken hos ett tal.

Geometrisk tolkning 2:



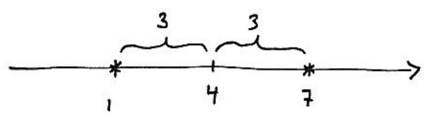
$|x-y|$ = "avstånd mellan x och y på tallinjen".

Ex: Markera på tallinjen alla tal x som uppfyller

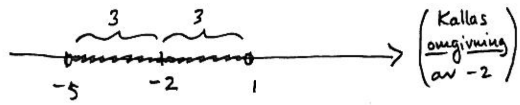
a) $|x-4| = 3$ b) $|x+2| < 3$!

a) Vi är ute efter alla tal x vars avstånd till talet 4 är 3, dvs. (8)

$|x-4| = 3 \iff x=1$ eller $x=7$



b) $|x+2| < 3 \iff |x-(-2)| < 3 \iff -5 < x < 1$



> Absolutbelopp (matematisk definition):
> $$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

OBS! $-x$ ovan är positivt.

Ex: $|-4| = -(-4) = 4$.

> Anm: Räkneregeln $(\sqrt{a})^2 = a$ är alltid sann, men observera att $\sqrt{a^2} = a$ bara gäller då $a \geq 0$.
> Exempelvis är $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, men $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
> Vi kan uttrycka detta med hjälp av absolutbelopp, nämligen
> $$\sqrt{a^2} = |a|.$$