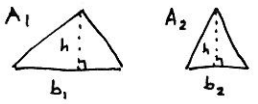
Föreläsning 4

Transversalsatsen och likformighet:

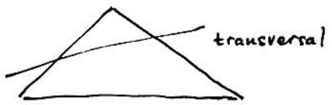
Lemma 1: Areorna hos två trianglar med samma höjd förhåller sig som baserna, dvs. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2}$

Bevis:



$$\begin{cases} A_1 = \frac{b_1 \cdot h}{2} \\ A_2 = \frac{b_2 \cdot h}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad \square$$

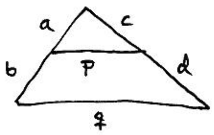
Def (transversal):



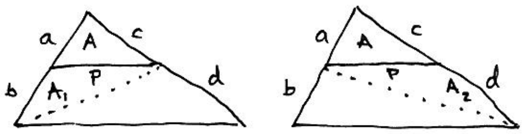
Rät linje genom triangel som ej skär något hörn.

Sats 12 (Transversalsatsen):

En transversal, som är parallell med en sida i en triangel, delar de övriga sidorna i lika förhållande, dvs. sträcka p // sträcka q $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$



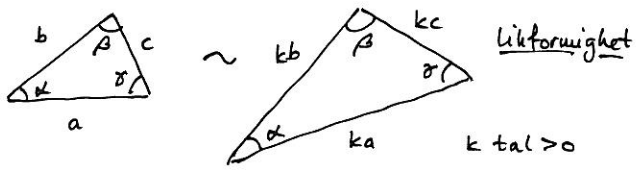
Bevis:



Dra två hjälplinjer (se figur!). Trianglarna med area A och A_1 har samma höjd och enligt Lemma 1 gäller då $\frac{A}{A_1} = \frac{a}{b}$. På samma sätt gäller $\frac{A}{A_2} = \frac{c}{d}$.

"Trianglarna A_1 och A_2" har samma bas (=p) och samma höjd $\Rightarrow A_1 = A_2$. Vi får $\frac{a}{b} = \frac{A}{A_1} = \frac{A}{A_2} = \frac{c}{d}$. $\square$

Likformighet:



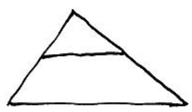
Definition 10: Två trianglar sägs vara likformiga om

- varje vinkel i den ena triangeln är lika stor som motsvarande vinkel i den andra.
- de tre sidorna i den ena triangeln är proportionella mot motsvarande sidor i den andra (se ovan).

Målet är att utveckla metoder för att "känna igen" likformiga trianglar; tre stycken likformighetsfall

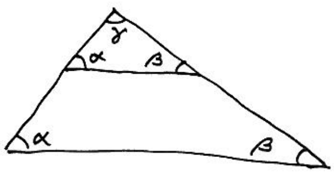
Sats 13 (Topptriangelsatsen):

En transversal som är parallell med en sida i en triangel skär av

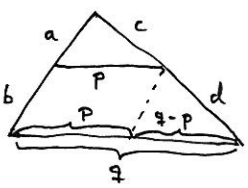


en topptriangel som är likformig med den stora triangeln.

Bevis:



Transversal och sida är parallella $\overset{\text{Axiom 2}}{\Rightarrow}$ likbelägna vinklar är lika (se figur). Toppvinkeln γ är gemensam, så topptriangeln och den stora triangeln har alla vinklar lika. Vi kollar proportionaliteten hos sidlängderna!



Transversalsatsen ger att

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Vi får nu följande:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{c}{d}+1} = \frac{c}{c+d}.$$

Vidare, dra en linje (streckad) parallell med den andra sidan. Vi får ett parallellogram, och parallellogramsatsen (förel. 3) ger att den motsatta sidan till den heldragna transversalen har längd p (se figur). Nu ger transversalsatsen (med nedre högra hörnet som topp) att

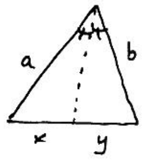
$$\frac{d}{c} = \frac{q-p}{p}, \text{ och vi får}$$

$$\frac{c}{c+d} = \frac{1}{1+\frac{d}{c}} = \frac{1}{1+\frac{q-p}{p}} = \frac{p}{p+(q-p)} = \frac{p}{q}. \qquad \square$$

Sats 14 (Bisektrissatsen):

Dra en bisektris från ett triangelhörn. Med beteckningar enligt figur gäller då

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

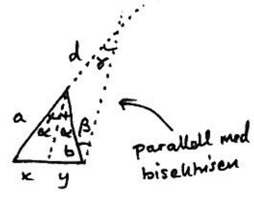


Bevis: Dra linjer enligt figur!

Enligt transversalsatsen gäller

$$\frac{a}{d} = \frac{x}{y}.$$

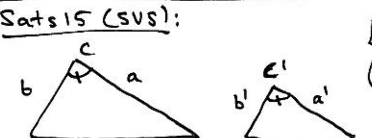
Vi är klara om



vi kan visa att b = d. Enligt Axiom 2 är de likbelägna vinklarna α och γ lika. Samma gäller för alternatvinklarna α och β. Det följer att den nya (yttre) triangeln har lika stora basvinklar (β = γ). Enligt basvinkelsatsen (förel. 3) är då b = d. $\square$

Likformighetsfallen:

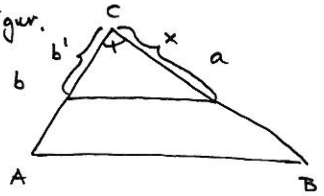
Sats 15 (SVS):



$$\begin{cases} \angle C = \angle C' \\ \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Bevis: Om $a=a'$, $b=b'$ är trianglarna kongruenta. (klart!)

Antag därför att t.ex. $b > b'$. Dra transversal i ΔABC parallell med AB enligt figur.



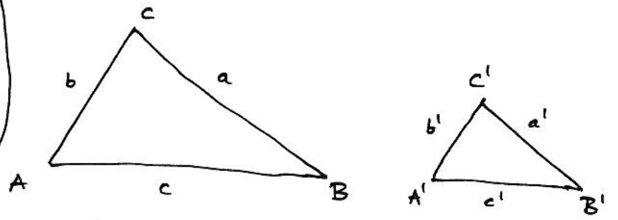
Enligt topptriangelsatsen är topptriangeln likformig med ΔABC, och det följer att

$$\frac{x}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \implies x = a'$$

↑ förutsättningen

Kongruensfall SVS ger att topptriangeln är kongruent med $\Delta A'B'C'$ $\implies$ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. □

Sats 16 (SSS):

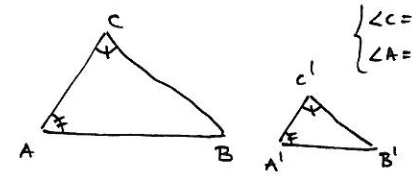


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Bevis: Läs själva!

(Liknande metod som ovan.)

Sats 17 (VV):

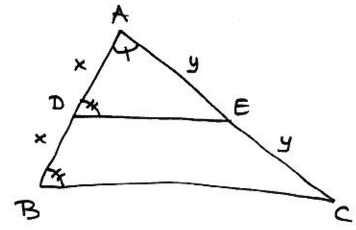


$$\begin{cases} \angle C = \angle C' \\ \angle A = \angle A' \end{cases} \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Bevis: Läs själva!

Ex: En linje genom en triangel delar två av triangelns sidor mitt itu. Visa att linjen måste vara parallell med triangelns tredje sida.

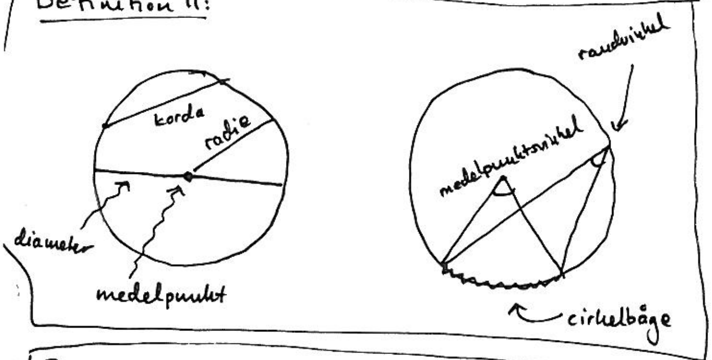
Bevis:



Vi vill visa att $DE \parallel BC$.
Vi ser att $\angle A$ är gemensam och att de angränsande sidorna i ΔABC och ΔADE är proportionella (kvot 2).
Likformighetsfall SVS ger då att $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.
Då följer att $\angle B = \angle D$, och då dessa är likbelägna vinklar följer av Axiom 2 att $DE \parallel BC$. □

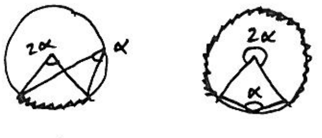
Def. (Cirkel):
En cirkel består av alla punkter som ligger på ett givet avstånd r från en given punkt (medelpunkt).

Definition 11:

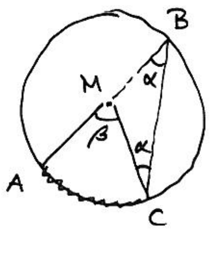


Sats 18 (Randvinkelsatsen):
En randvinkel är hälften så stor som medelpunktsvinkeln på samma cirkelbåge.

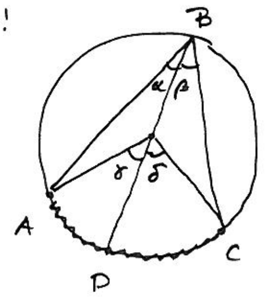
OBS!



Bevis: (Fall 1) ΔBMC är likbent (två st. radier!).
Satsen om likbent triangel (förel. 3) ger då att $\angle C = \angle B = \alpha$.
Yttervinkelsatsen ger nu att $\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$ och beviset är klart.



(Fall 2) Dra diagonalen BD!
Bet. enligt figur. Använd fall 1 på ABD resp. DBC och addera:



$$\begin{cases} \gamma = 2\alpha \\ \delta = 2\beta \end{cases} \implies$$

$$\gamma + \delta = 2(\alpha + \beta)$$

(Fall 3) Läs själva! □

OBS! Kordasatserna (Sats 19 & 20) ingår ej i kursen.

Läs teorin för tangenter själva!