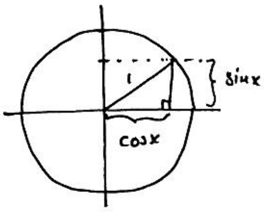
Föreläsning 11

(1)

Trigonometriska formler:

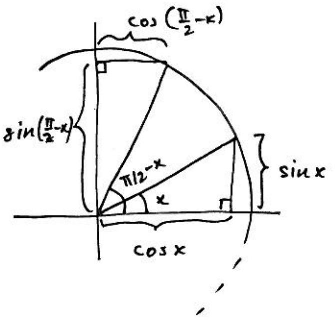
Pythagoras sats ger

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$



Trigonometriska ettan!

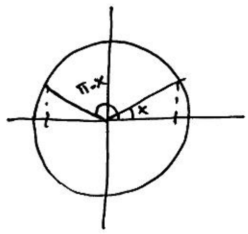
Många trigonometriska samband kan ses genom att titta i enhetscirkeln:



$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x\end{aligned}}$$

Ett sätt att skriva om sinus till cosinus och vice versa!

$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos x}$$



Hitta gärna några fler på egen hand!

(2)

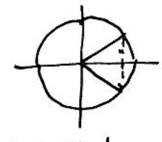
Ex: Lös ekvationen

$$\cos 2x = \sin 5x \quad !$$

Lösning: Skriv om till "samma typ" med hjälp av formlerna ovan:

$$\cos 2x = \sin 5x \iff \cos 2x = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - 5x\right)$$

$$\underset{\text{Figur}}{\iff} \text{ eller }\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi k \\ 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + 2\pi k \end{cases},$$



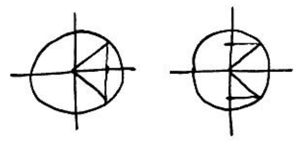
k heltal

$$\iff \text{ eller }\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 3x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k \end{cases} \iff \text{ eller }\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7}k \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k' \end{cases}$$

$(k' = -k)$ □

där k, k' heltal

Vi påminner om att cosinusfunktionen är jämn och sinusfunktionen udda



$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x\end{aligned}}$$

(3)

Många av de trigonometriska formlerna ovan kan härledas utifrån två allmänna samband:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\end{aligned}}$$

Dessa kallas additionsformlerna för cosinus respektive sinus. (Bevis: Läs själva!)

Ex: Vad är $\cos\frac{\pi}{12}$?

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad \text{så} \quad \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

add.formel

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

cos jämn, sin udda

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}}. \quad \square$$

Sätter vi $x=y$ i additionsformlerna ovan så får vi formlerna för "dubbla vinkeln":

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x\end{aligned}}$$

(4)

Formeln för $\cos 2x$ finns i två varianter. Kombinerar vi med "trig. ettan" får vi

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

resp. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$,

dvs.

$$\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x}$$

Ex: Lös ekvationen

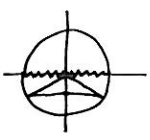
$$\cos 2x = 1 + \sin x \quad !$$

Lösning: $\cos 2x = 1 + \sin x \iff 1 - 2\sin^2 x = 1 + \sin x$

$$\iff -2\sin^2 x = \sin x \iff 2\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\iff 2\sin x\left(\sin x + \tfrac{1}{2}\right) = 0 \iff \text{ eller }\begin{cases}\sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\iff \text{ eller }\begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ eller } x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\end{cases}$$



Svar: $x = k\pi$ eller $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ eller $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, k heltal

$$\boxed{\text{Formler som ska "kunnas": } (8.17) - (8.39)}$$

Hjälpvinkelmetoden:

Varje funktion på formen

$$f(x) = a\sin\omega x + b\cos\omega x, \qquad a, b, \omega \text{ konstanter}$$

kan skrivas som en enda sinus/cosinusfunktion.

Ex: $f(x) = 1\cdot\sin x + \sqrt{3}\cos x$.

$$f(x) = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}\cos x\right) =$$

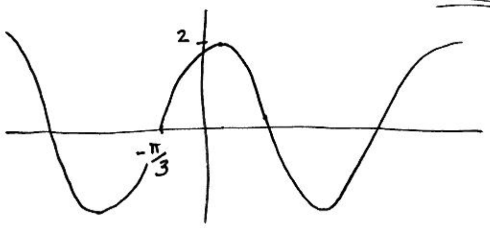
$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = (*)$$

Vi försöker nu använda additionsformeln

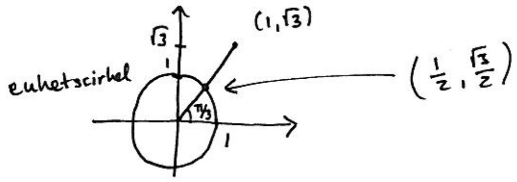
$$\boxed{\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y}$$

$$(*) = 2\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{=\cos\frac{\pi}{3}}\sin x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=\sin\frac{\pi}{3}}\cos x\right) =$$

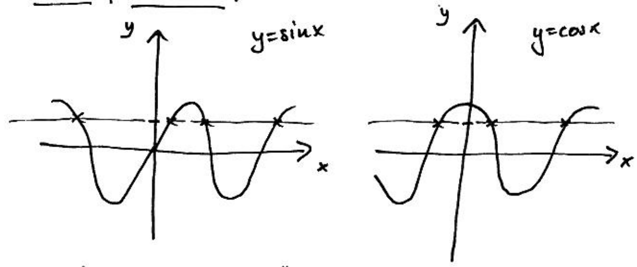
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \quad !$$



Anledning till att det fungerar:

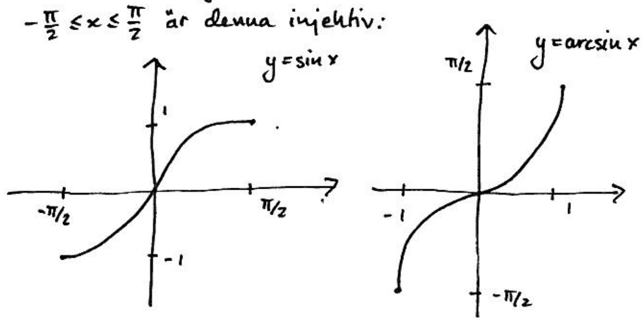


Arcusfunktioner:



$\sin x$ och $\cos x$ är ej injektiva!

Men om vi begränsar t.ex. $f(x) = \sin x$ till intervallet $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ är denna injektiv:



Vi betecknar inversen $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

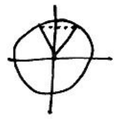
$$D_{f^{-1}} = [-1, 1], \quad V_{f^{-1}} = [-\pi/2, \pi/2]$$

> arcsin x = "den vinkel mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$ som, om man tar sinus av den, blir x"

Ex: Vad är $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Vi löser $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (rita enhetscirkel!)

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ eller $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, k heltal



Vi ser att endast $x = \frac{\pi}{3}$ i intervallet $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Svar: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

Ex: Beräkna

a) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$!

Lösning: a) Eftersom $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ får vi

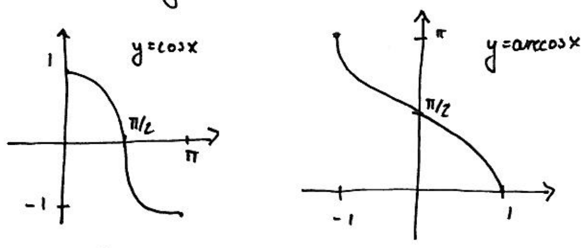
$\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ (enligt ovan)

b) Även $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, och vi får

$\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ (?)

Förklaring: arcsin är ej "äkta" invers till sinus.

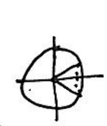
- Funktionen $g(x) = \cos x$, $0 \le x \le \pi$, är injektiv och har inversen $g^{-1}(x) = \arccos x$.



$D_{g^{-1}} = [-1, 1]$, $V_{g^{-1}} = [0, \pi]$

Ex: Vad är $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$?

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, k heltal



Enbart $x = \pi/6$ i rätt intervall, så $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

> **På samma sätt:**
> - arctan x är invers till $f(x) =$ tan x [redacted], $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
> - arccot x — " — $g(x) = \cot x$, $0 < x < \pi$.

Hyperboliska funktioner:

> **Def:** $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Grafen till cosh x kallas kedjekurva